

مجموعه‌ی آزمون‌های

تحلیل داده

شهاب‌الدین محین، محمد هادی —توده

نیما چرتاب سلطانی، علیرضا علوی، روزبه قادری

علی زینالی، پریمه‌ماه صفریان، پارسا عالیان

به نام یکتای درکمال

با قدردانی از اساتیدمان در باشگاه دانش پژوهان جوان

نیما چرتاب سلطانی، مهدی سلیمانی فر،
احسان عابدی و علی فهمینیا

مقدمه

یکی از فعالیت‌های جدایی ناپذیر از فرایند علم، تحلیل داده‌های برگرفته از رصدها و شبیه‌سازی‌ها است. این کار با هدف تفسیر مشاهدات و بهبود مدل‌های علمی انجام می‌شود. از همین رو، مبحث تحلیل داده در المپیاد نجوم نیز از اهمیت خاصی برخوردار است. تحلیل داده، در کنار تئوری و رصد، سه بخش اصلی المپیاد کشوری و المپیاد جهانی نجوم و اختر فیزیک را تشکیل می‌دهند. در المپیاد جهانی ۲۵٪ ارزشیابی شامل آزمون‌های تحلیل داده (به صورت قلم و کاغذ یا با استفاده از ابزارهای رایانه‌ای مانند اکسل) است.

هدف اصلی درس تحلیل داده در المپیاد نجوم، تجزیه و تحلیل داده‌های مربوط به مسائل تئوری و به کارگیری ابزارهای برگرفته از علم آمار برای دریافت نتیجه از آن‌ها است؛ در نتیجه تسلط کافی بر مباحث تئوری و نحوه‌ی استفاده از ابزارهای موجود در آمار و احتمال، لازمه‌ی حل مسائل تحلیل داده هستند. شایان ذکر است پرداختن به مباحث آمار و احتمال به صورت پیشرفته و آموزش ابزارهای رایانه‌ای، مختص دوره‌ی طلا است. در دوره‌ی تابستانه و دوره‌ی طلای المپیاد کشوری نجوم و اختر فیزیک در سال‌های اخیر، سهم مبحث تحلیل داده در ارزشیابی همواره ۲۵٪ بوده است.

وظیفه‌ی گروه تحلیل داده در این سال‌ها، آشنا کردن شرکت کنندگان المپیاد نجوم با این مبحث و نشان دادن کاربردهای تحلیل داده‌ها در نجوم حرفه‌ای بوده است. اعضای گروه تحلیل داده تلاش کرده‌اند در جایگاه سیاست‌گذاری و در عمل، وظایف تبیین شده برای گروه تحلیل داده را با برگزاری کلاس‌های درسی، کارگاه‌ها، آشنا کردن با ابزارهای رایانه‌ای، فعالیت‌های عملی و آزمون‌های تحلیل داده در کمیته‌ی نجوم و اختر فیزیک انجام دهند. مجموعه‌ی حاضر شامل اکثر آزمون‌های تحلیل داده‌ی برگزار شده در دوره‌های زیر است:

دوره‌ی طلای ۹۵-۱۳۹۴

دوره‌ی طلای ۹۴-۱۳۹۳

دوره‌ی طلای ۹۶-۱۳۹۵

دوره‌ی تابستانه‌ی ۱۳۹۵

دوره‌ی طلای ۹۸-۱۳۹۷

دوره‌ی تابستانه‌ی ۱۳۹۷

شایان ذکر است مجموع زمان آزمون‌های این مجموعه به ۴۶۵۰ دقیقه می‌رسد. در نهایت از تلاش‌های دوستان عزیزمان محمدرضا حسن‌پور، سیدمرتضی سادات، فاطمه زرگرباشی، امیرحسین امیری، شایان عزیزی، امیراحسان علیزاده، امیرعلی اختراعی، هدی پورغلامی، کیان باختری و محمدصدرا حیدری که در آماده‌سازی و برگزاری کارگاه‌های تحلیل داده، طراحی سؤالات و آماده‌سازی آزمون‌ها همکاری داشته‌اند؛ دکتر مهدی خاکیان که فرصت طراحی و اجرای برنامه‌های گروه تحلیل داده در دوره‌های مذکور را فراهم کردند و نیز آقای علی اکبر کاوه‌ای که در این چند سال ما را از نظرات ارزشمندشان بهره‌مند کردند تشکر می‌شود. همچنین از همکارانمان در باشگاه دانش‌پژوهان جوان، علی ناصرزاده، سیدمرتضی حسینی، بهرام مددی، هیوارخشان و محمدتقی بابامرادی سپاسگزاریم.

برای ارتباط با ما می‌توانید از نشانی‌های زیر استفاده کنید.

شهاب‌الدین محین: shahabmohin@gmail.com

محمد‌هادی ستوده: mhsotoudeh@yahoo.com

فهرست مطالب

آزمون‌های تحلیل داده‌ی دوره‌ی طلای ۱۳۹۳-۹۴:

.....	آزمون تحلیل داده با ۱ کسل ۱
.....	آزمون تحلیل داده با ۱ کسل ۲
.....	آزمون پایانی تحلیل داده

آزمون‌های تحلیل داده‌ی دوره‌ی طلای ۱۳۹۴-۹۵:

.....	آزمون مفاهیم پایه
.....	آزمون میان‌دوره‌ی تحلیل داده
.....	آزمون تحلیل داده با ۱ کسل

آزمون‌های تحلیل داده‌ی دوره‌ی تابستانی ۱۳۹۵:

.....	آزمون تحلیل داده ۲
-------	--------------------

آزمون‌های تحلیل داده‌ی دوره‌ی طلای ۱۳۹۵-۹۶:

.....	آزمون مفاهیم پایه ۱
.....	آزمون میان‌دوره‌ی تحلیل داده
.....	آزمون مفاهیم پایه ۲
.....	آزمون تحلیل داده با ۱ کسل

آزمون‌های تحلیل داده‌ی دوره‌ی تابستانی ۱۳۹۷:

.....	آزمون مفاهیم پایه
.....	آزمون تحلیل داده ۱
.....	آزمون تحلیل داده ۲

آزمون‌های تحلیل داده‌ی دوره‌ی طلای ۱۳۹۷-۹۸:

.....	آزمون مفاهیم پایه
.....	آزمون تحلیل داده ۱
.....	آزمون تحلیل داده با ۱ کسل
.....	آزمون تحلیل داده ۲

* در دوره‌های طلای ۱۳۹۴-۹۵ و ۱۳۹۵-۹۶، آزمون‌های پایانی تحلیل داده با آزمون‌های دوره‌ی تابستانه مشترک بوده‌اند. هم‌چنین برگزاری آزمون تحلیل داده با ۱ کسل و آزمون تحلیل داده با برنامه‌نویسی در دوره‌ی تابستانه مغایر با اهداف گروه تحلیل داده است.

آزمون‌های تحلیل داده‌ی

دوره‌ی طلای ۹۴-۱۳۹۳

آزمون تحلیل داده با اکسل ۱

تاریخ: ۱۸ اسفند ۱۳۹۳

مدت زمان: ۱۸۰ دقیقه

آزمون تحلیل داده با اکسل ۲

تاریخ: ۲۰ اردیبهشت ۱۳۹۴

مدت زمان: ۳۰۰ دقیقه

آزمون پایانی تحلیل داده

تاریخ: ۲۲ اردیبهشت ۱۳۹۴

مدت زمان: ۳۶۰ دقیقه

به نام خدا

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان

مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»



دهمین دوره‌ی طلای المپیاد نجوم و اخترفیزیک

بخش تحلیل داده

آزمون تحلیل داده با اکسل ۱

۱۸ اسفند ۱۳۹۳

مدت آزمون: ۱۸۰ دقیقه (۱۴:۰۰ تا ۱۷:۰۰)

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است به موارد زیر توجه فرمایید:

- (۱) این آزمون ۱۲ سؤال دارد و زمان آن ۱۸۰ دقیقه است.
- (۲) به همراه دفترچه‌ی سؤالات، دفترچه‌ی پاسخ‌نامه، چرک‌نویس و ۲ فایل در اختیار شما قرار گرفته است.
- (۳) در این آزمون می‌توانید از ماشین حساب خودتان که قابلیت برنامه‌ریزی ندارد، استفاده کنید.
- (۴) همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی به جز لپتاپ مجاز نیست.
- (۵) پس از انجام هر سؤال، فایل خود را در پوشه‌ی مربوط به آن ذخیره (Save As) کنید.
- (۶) فایل‌های نهایی خود را در یک پوشه به نام خودتان ذخیره کرده و در پایان، به همراه پاسخ‌نامه تحویل دهید.

©کلیه‌ی حقوق این سؤالات برای معاونت دانش‌پژوهان جوان محفوظ است.



ثوابت فیزیکی و نجومی

مقدار	کمیت
$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$	ثابت جهانی گرانش G
$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$	ثابت بولتزمن k
$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	سرعت نور c
$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$	واحد جرم اتمی amu
$3.09 \times 10^{16} \text{ m}$	پارسک pc
$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$	جرم خورشید M_{\odot}
$3.85 \times 10^{26} \text{ W}$	درخشندگی خورشید L_{\odot}
$5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$	جرم زمین M_{\oplus}
6378 km	شعاع زمین R_{\oplus}

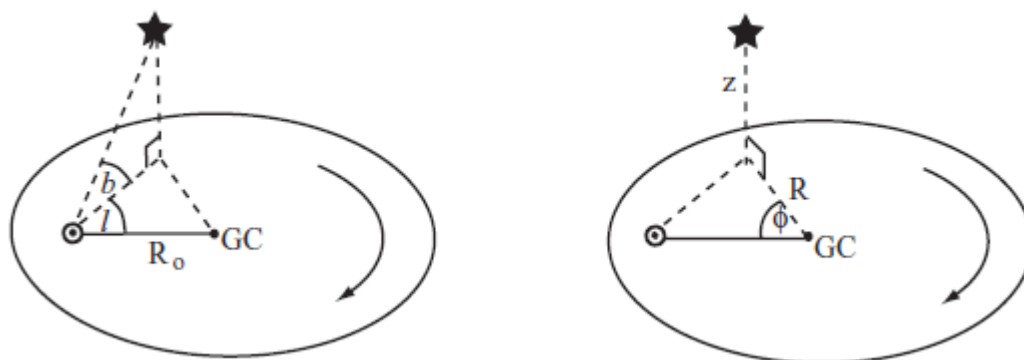
ثوابت اورت (۱۲۰ نمره) (طراح: شهاب الدین محین)

در یک پروژه رصدی تعدادی از متغیرهای RR شلیاقی مورد بررسی قرار گرفته‌اند. داده‌های این ستارگان در فایل «Data RR.xlsx» قرار داده شده است. ستون‌ها از چپ به راست، طول کهکشانی بر حسب درجه، قدر ظاهری میانگین و قرمزگرایی ستارگان هستند. در این سوال برای راحتی فرض کنید که قرمزگرایی و طول کهکشانی خطا ندارند و صرفاً داده‌هایی خطا دارند که به خطایشان اشاره شده باشد.

۱. قدر مطلق میانگین متغیرهای RR شلیاقی $M = 0.61 \pm 0.20$ و ثابت جذب $a = 1 \frac{\text{mag}}{\text{kpc}}$ است. با روش‌های حل عددی (مانند نیوتون-رافسون) فاصله‌ی این ستارگان متغیر از ما را به همراه خطا به دست آورید. خطای قدر ظاهری ۰/۰۱ است.

۲. با این فرض که فاصله‌ی ما از مرکز کهکشان $R_0 = 8.00 \pm 0.10 \text{ kpc}$ و عرض کهکشانی ستارگان موجود در فایل اکسل برابر با صفر است، فاصله‌ی این ستارگان را از مرکز کهکشان به همراه خطا به دست آورید.

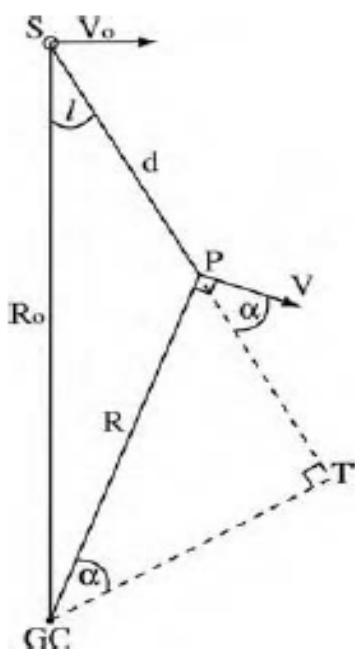
۳. نمودار مکان ستارگان را در دستگاه مختصات کهکشانی به همراه میله‌های خطا رسم کنید. دقت کنید که دستگاه باید راست‌گرد باشد؛ مرکز آن بر روی مرکز کهکشان و محور X به سمت خورشید باشد. فاصله‌ی خورشید از صفحه کهکشان را صفر در نظر بگیرید.



شکل ۱ - دستگاه مختصات کهکشانی

۴. با توجه به سرعت شعاعی ستارگان متغیر، سرعت دورانی آن‌ها را به دور مرکز کهکشان به دست آورید. شکل ۲ می‌تواند در این زمینه کمک کند. سرعت خورشید به دور مرکز کهکشان $V_0 = 220 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ است. فرض کنید که ستارگان در صفحه‌ی کهکشان در مدار دایره‌ای به دور مرکز کهکشان می‌گردند. همچنین از خطای V_0 صرف نظر کنید.

راهنمایی: $\cos \alpha = \frac{R_0 \sin l}{R}$



شکل ۲ - چرخش ستارگان در کهکشان

۵. مدلی که اخیراً برای منحنی چرخش ستارگان ارائه شده است، $V_c = V_a \frac{R}{\sqrt{a^2 + R^2}}$ است. با برازش منحنی بر داده‌های فوق V_a, a را همراه با خطا بدست آورید.

۶. ثوابت اورت را با خطا گزارش کنید. مقدار واقعی آن $A = 14.8 \pm 0.8 \frac{\text{km}}{\text{s kpc}}$ و

است، انحراف نسبی را گزارش کنید. $B = -12.4 \pm 0.6 \frac{\text{km}}{\text{s kpc}}$

راهنمایی: $A = -\frac{1}{2} \left(\frac{dV}{dR} \Big|_{R=R_0} - \frac{V_0}{R_0} \right)$

توزیع خوشه‌های کروی (۶۰ نمره) (طراح: شهاب‌الدین محین)

همان طور که می‌دانیم، تعداد ستارگان خوشه‌های کروی حدود 10^4 تا 10^6 ستاره و عمرشان در مرتبه‌ی میلیارد سال است؛ بنابراین برای بررسی سیستم‌های ستاره‌ای مناسب هستند. پس از ارائه‌ی تابع جرم اولیه‌ی سالپتر^۱ در دهه‌ی ۸۰ میلادی، مطالعات بر روی این سیستم‌ها شدت گرفت تا این که دانشمندان در اوایل دهه‌ی ۹۰ به این نتیجه رسیدند که رابطه‌ی مشابهی برای خوشه‌های کروی وجود دارد که در آن $N(m) \propto m^{-\alpha}$ است و α مقدارهای متفاوتی را در بازه‌های مشخص می‌گیرد. بلافاصله بعد از این نظریه، در سال ۱۹۹۱ رصدگران نشان دادند که نسبت جرم-درخشندگی مطابق $M/L \propto M^\eta$ است که $\eta \ll 1$ است.

بر اساس نظریات و مشاهدات بالا، می‌توان نتیجه گرفت که $L \propto M$ است و در نتیجه $N(L) = KL^{-\alpha}$ است. K و α ضرایب ثابتی هستند که مقدارهای متفاوتی را در بازه‌های مشخص می‌گیرند. حال اگر به ازای هر L در بازه‌ی $[L - \delta, L + \delta]$ از تابع $N(L)$ انتگرال بگیریم، تعداد خوشه‌های کروی در آن بازه را به دست می‌آوریم که به آن تابع درخشندگی خوشه‌های کروی^۲ (GCLF) می‌گویند پس می‌توانیم نمودار فراوانی آن را رسم کنیم. در این بخش به بررسی آماری این موضوع می‌پردازیم.

در فایل «Data GC.txt» خوشه‌های کروی راه‌شیری به همراه قدر مطلقشان و خوشه‌های کروی کهکشان آندرومدا به همراه قدر ظاهری‌شان موجود هستند.

۷. نمودار فراوانی خوشه‌های کروی راه‌شیری را بر حسب قدر مطلق رسم نمایید. طول بازه‌های قدر مطلق را ۰/۵ در نظر بگیرید و توجه کنید که مقدار ابتدا و انتهای بازه‌ها مضرب ۰/۵ باشد.

۸. نمودار فراوانی خوشه‌های کروی کهکشان آندرومدا را بر حسب قدر ظاهری رسم نمایید. لازم است طول بازه‌ها برابر با ۰/۵ قدر و مقادیر ابتدا و انتهای بازه‌ها مضرب ۰/۵ باشد.

^۱ Salpeter Initial Mass Function

^۲ Globular Cluster Luminosity Function



همان طور که مشاهده می‌کنید، نمودارها تقریباً شبیه نمودار گاوسی هستند و با تئوری بیان شده در قسمت بالا سازگاری دارند. برای به دست آوردن پارامترهای این تابع توزیع، لازم است بر این داده‌ها نمودار گاوسی برازش کنیم. با این حال، به دلیل تعداد کم و انتخاب تصادفی داده‌ها و همچنین عدم برخورداری ابزارهای موجود از دقت کافی، برای پارامترهای تابع توزیع گاوسی از میانگین و انحراف معیار داده‌ها استفاده می‌کنیم.

۹. میانگین و انحراف معیار را برای هر دو کهکشان به طور جداگانه گزارش کنید.

۱۰. برای خوشه‌های کروی کهکشان آندرومدا با استفاده از آزمون χ^2 نشان دهید که تابع توزیع گاوسی توزیع خوشه‌ها را به خوبی توصیف می‌کند.

می‌توان با آزمون χ^2 نشان داد که تابع توزیع گاوسی برای توزیع خوشه‌های کروی کهکشان راه‌شیری نیز مناسب است. در ادامه مجاز به استفاده از این فرض هستید.

۱۱. نکته‌ای قابل توجه در اینجا، این است که می‌توان نشان داد در GCLF میانه، میانگین و مد با هم برابر هستند. با استفاده از این نکته فاصله‌ی کهکشان آندرومدا از کهکشان راه‌شیری را به دست آورید.

۱۲. مدول فاصله‌ی کهکشان آندرومدا 24.41 ± 0.10 است. علت تفاوت آن با مقدار محاسبه شده چیست؟



روابط برازش خطّ راست

$$y = A + Bx$$

$$d_i = y_i - (A + Bx_i)$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

$$A = \bar{y} - B\bar{x}$$

$$(\Delta B)^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

$$(\Delta A)^2 = \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \right) \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

$$y = Bx$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

$$(\Delta B)^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 1}$$

جدول انتگرال تابع توزیع گاوسی

$$(\bar{x} = ., \quad \sigma^2 = 1)$$

Standard Normal Cumulative Probability Table



Cumulative probabilities for POSITIVE z-values are shown in the following table:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

به نام خدا

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان

مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»



دهمین دوره‌ی طلای المپیاد نجوم و اخترفیزیک

بخش تحلیل داده

آزمون تحلیل داده با اکسل ۲

۲۰ اردیبهشت ۱۳۹۴

مدت آزمون: ۳۰۰ دقیقه (۱۴:۰۰ تا ۱۹:۰۰)

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است به موارد زیر توجه فرمایید:

- (۱) این آزمون ۱۲ سؤال دارد و زمان آن ۳۰۰ دقیقه است.
- (۲) به همراه دفترچه‌ی سؤالات، دفترچه‌ی پاسخ‌نامه، چرک‌نویس و ۱ فایل در اختیار شما قرار گرفته است.
- (۳) در این آزمون می‌توانید از ماشین حساب خودتان که قابلیت برنامه‌ریزی ندارد، استفاده کنید.
- (۴) همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی به جز لپ‌تاپ مجاز نیست.
- (۵) پس از انجام هر سؤال، فایل خود را در پوشه‌ی مربوط به آن ذخیره (Save As) کنید.
- (۶) فایل‌های نهایی خود را در یک پوشه به نام خودتان ذخیره کرده و در پایان، به همراه پاسخ‌نامه تحویل دهید.

©کلیه‌ی حقوق این سؤالات برای معاونت دانش‌پژوهان جوان محفوظ است.



ثوابت فیزیکی و نجومی

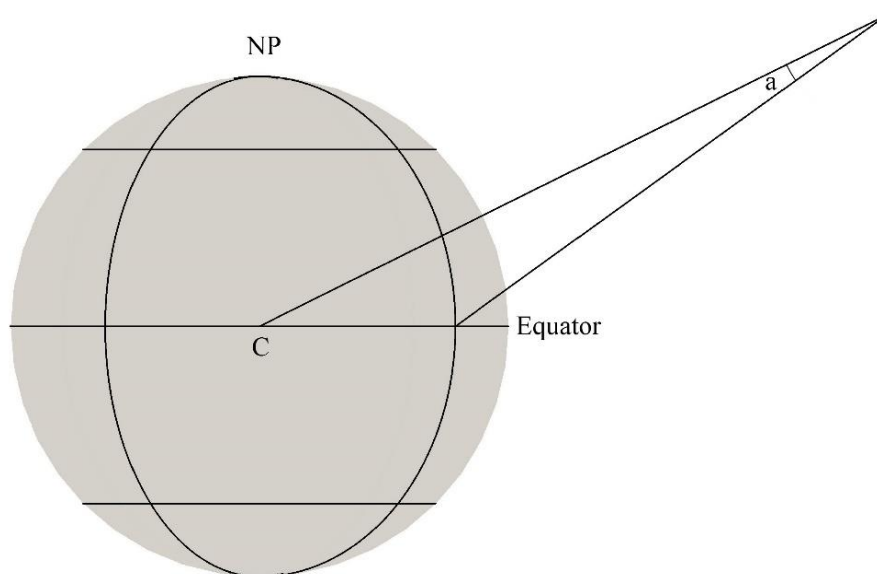
مقدار	کمیت
6.67×10^{-11} $\text{m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1}$	ثابت جهانی گرانش G
1.38×10^{-23} J K^{-1}	ثابت بولتزمن k
3.00×10^8 m s^{-1}	سرعت نور c
1.67×10^{-27} kg	واحد جرم اتمی amu
3.09×10^{16} m	پارسک pc
1.99×10^{30} kg	جرم خورشید M_{\odot}
3.85×10^{26} W	درخشندگی خورشید L_{\odot}
4.87×10^{24} kg	جرم زهره بدون جو M_V
6052 km	شعاع زهره بدون جو R_V
5.97×10^{24} kg	جرم زمین M_{\oplus}
6378 km	شعاع زمین R_{\oplus}

مدارهای چرخنده (۳۰۰ نمره) (طراح: شهاب الدین محین)

اداره‌ی کل ملی هوانوردی و فضا^۱ (ناسا) در پروژه‌ی شامو (ShaMo) که در سال ۲۰۱۴ موفق به انجام آن شد، ماهواره‌ای به نام Sh1 را به سمت سیاره‌ی زهره فرستاد. داده‌های این ماهواره در فایل «Data SAT.dat» موجود است. Sh1 برای فاصله‌یابی پالسی به سمت نزدیک‌ترین نقطه بر روی سطح زهره می‌فرستد و مدت زمان رفت و برگشت پالس را اندازه می‌گیرد. در ستون دوم فایل، این داده بر حسب میلی ثانیه نوشته شده است.

برای به دست آوردن موقعیت کامل ماهواره دو کار دیگر نیز انجام می‌شود. ابتدا ماهواره، مطابق شکل ۱، زاویه‌ی a را اندازه می‌گیرد، توجه کنید که اگر میل زهره مرکزی ماهواره، منفی باشد این زاویه نیز منفی خواهد بود. مقدار این زاویه بر حسب درجه در ستون سوم موجود است. برای به دست آوردن بُعد زهره مرکزی ماهواره، در هر لحظه بعد ستاره‌ی مماس بر استوا اندازه‌گیری می‌شود که برای ساده شدن مسئله، در ستون چهارم، بعد زهره مرکزی ماهواره بر حسب درجه داده شده است. میزان شارژ باتری ماهواره در ستون پنجم و زمان انجام اندازه‌گیری در ستون ششم نوشته شده است.

می‌دانیم که جو سیاره‌ی زهره بسیار غلیظ است و تغییرات شتاب گرانشی در آن محسوس است. از اصطکاک جو با ماهواره صرف‌نظر می‌کنیم. دما در ارتفاع 400 km از سطح زهره را 670 K در نظر بگیرید.



شکل ۱ - اندازه‌گیری زاویه‌ی a

۱. با توجه به داده‌ها فاصله‌ی ماهواره از مرکز زهره (r) را به همراه خطا گزارش کنید.

۲. میل زهره مرکزی ماهواره را محاسبه کنید (نیازی به گزارش خطا نیست).

۳. فاصله‌ی زاویه‌ای تمام مکان‌های ماهواره از مکان داده‌ی شماره یک را از دید ناظر در مرکز زهره به دست آورید (θ). توجه کنید که این زاویه می‌تواند از 180° درجه بیشتر باشد (نیازی به گزارش خطا نیست).

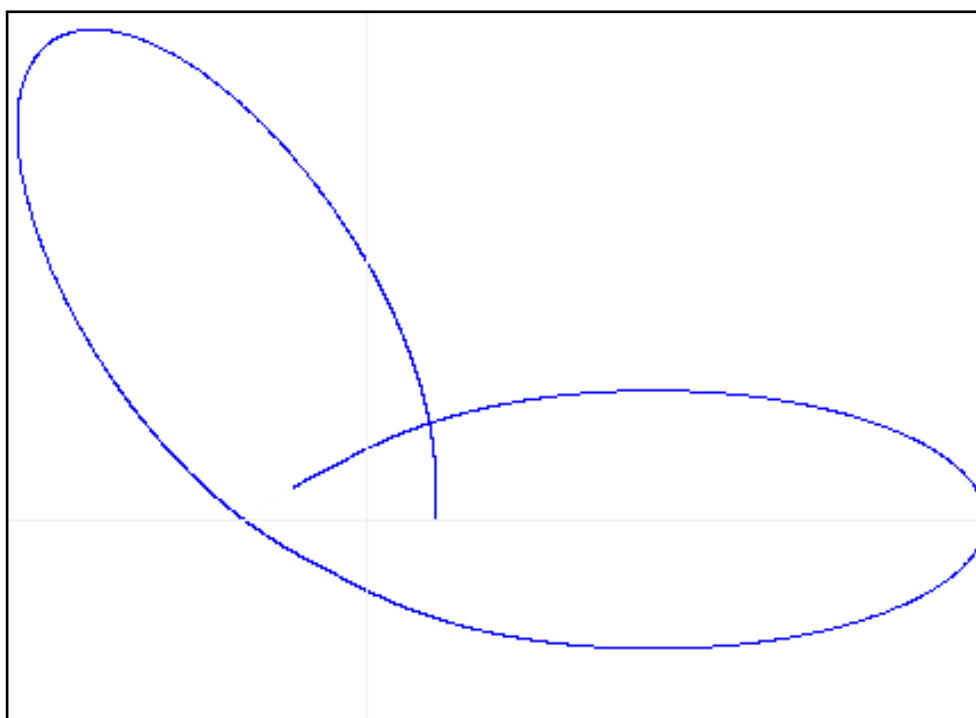
۴. نمودار قطبی r بر حسب θ را بدون میله‌های خطا رسم کنید. نمودار دکارتی r بر حسب θ را با میله‌های خطا رسم کنید.

۵. زاویه‌ی اوج و حضیضی مدار فوق را از روی نمودارهای قسمت بالا به همراه خطا محاسبه کنید. روش کارتان را به طور کامل و مختصر توضیح دهید.

۶. می‌دانیم که معادله قطبی مدار به شکل زیر است

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\omega'\theta - \theta_0)}$$

ω' یک ضریب ثابت است که باعث چرخش حضیض مدار می‌شود. a, e, θ_0 را فقط با استفاده از برازش منحنی به همراه خطا محاسبه کنید.



شکل ۲ - شکل مدار فوق با پارامترهای دلخواه (شکل مقیاس نیست!)



در سؤالات ۷ تا ۱۲ نیازی به محاسبه‌ی خطا نیست.

۷. مابقی عناصر مداری (Ω, ω, i) را برای تناوب اول ماهواره به دست آورید. (لزومی ندارد از برازش منحنی استفاده کنید).

۸. با فرض این که تکانه‌ی زاویه‌ای ماهواره ثابت است تابع نیروی وارد بر ماهواره، $F(r)$ را به دست آورید.

۹. با توجه به محاسبات قسمت قبل و اینکه مسئله تقارن کروی دارد تابع چگالی، $\rho(r)$ را به دست آورید.

۱۰. متأسفانه پس از ارسال داده‌ی شماره‌ی ۶۸، ساعت ماهواره از کار می‌افتد و دیگر زمانی ثبت نمی‌شود، زمان اندازه‌گیری داده‌های ۶۹ به بعد را محاسبه کنید.

۱۱. با استفاده از تعادل هیدرواستاتیک و معادله‌ی گاز کامل، دمای هوای مجاور ماهواره را به دست آورید. به دلیل نرخ یونش^۱ بالا در جو سیاره و همچنین دمای بالای آن، جرم میانگین ذرات سازنده‌ی جو را معادل 1 amu در نظر بگیرید.

۱۲. با توجه به این که سازنده این ماهواره شرکت آنتونف^۲ می‌باشد، شما به عنوان مهندس این شرکت استخدام شده‌اید! محصولات این شرکت طوری ساخته شده‌اند که اگر دمای هوای مجاور ماهواره از ۴۰۰ درجه‌ی سانتی‌گراد بیشتر باشد، احتمال از کار افتادن ماهواره با استفاده از تابع

$$P = \begin{cases} 0 & , T < 400^\circ\text{C} \\ 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} & , T \geq 400^\circ\text{C} \end{cases}$$

محاسبه می‌شود که $\tau = 60.00 \text{ min}$ و t مدت زمانی است که دمای هوای مجاور ماهواره بیشتر از ۴۰۰ درجه‌ی سانتی‌گراد است. حال احتمال از کار افتادن Sh1 در یک دوره‌ی تناوب را محاسبه نمایید.

^۱ Ionization

^۲ Antonev



روابط برازش خطّ راست

$$y = A + Bx$$

$$d_i = y_i - (A + Bx_i)$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

$$A = \bar{y} - B\bar{x}$$

$$(\Delta B)^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

$$(\Delta A)^2 = \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \right) \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

$$y = Bx$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

$$(\Delta B)^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 1}$$

به نام خدا

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»



دهمین دوره‌ی طلای المپیاد نجوم و اخترفیزیک

بخش تحلیل داده

آزمون پایانی

۲۲ اردیبهشت ۱۳۹۴

مدت آزمون: ۳۶۰ دقیقه (۸:۰۰ تا ۱۴:۰۰)

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است به موارد زیر توجه فرمایید:

- (۱) این آزمون ۱۴ سؤال دارد و زمان آن ۳۶۰ دقیقه است.
- (۲) به همراه دفترچه‌ی سؤالات، دفترچه‌ی پاسخ‌نامه، ۳ کاغذ رسم نمودار، خط‌کش، نقاله و چرک‌نویس در اختیار شما قرار گرفته است.
- (۳) در این آزمون می‌توانید از ماشین حساب خودتان که قابلیت برنامه‌ریزی ندارد، استفاده کنید.
- (۴) همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی مجاز نیست.

ح) کلیه‌ی حقوق این سؤالات برای معاونت دانش‌پژوهان جوان محفوظ است.



ثوابت فیزیکی و نجومی

توجه! ثوابت درون جدول خطا ندارند.

مقدار	کمیت
$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$	ثابت جهانی گرانش G
$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$	ثابت بولتزمن k
$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	سرعت نور c
$5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$	ثابت استفان-بولتزمن σ
$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$	واحد جرم اتمی amu
$3.09 \times 10^{16} \text{ m}$	پارسک pc
$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$	جرم خورشید M_{\odot}
$3.85 \times 10^{26} \text{ W}$	درخشندگی خورشید L_{\odot}
$5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$	جرم زمین M_{\oplus}



معادلات ساختار ستارگان (۲۳۰ نمره) (طراح: شهاب الدین محین)

در جدول ۱، برای یک ستاره چگالی در شعاع‌های مختلف ذکر شده است.

۱. با توجه به این که تابع چگالی

$$\rho = \frac{\rho_0}{1 + \left(\frac{r}{a}\right)^3}$$

است، با برازش خط ضرایب ρ_0 و a را به همراه خطا به دست آورید.

جدول ۱

#	r (m)	ρ (kg m ⁻³)
1	7.60E+07	1.25E+05
2	9.03E+07	9.92E+04
3	9.64E+07	8.98E+04
4	1.20E+08	5.94E+04
5	1.25E+08	5.41E+04
6	1.98E+08	1.73E+04
7	2.68E+08	7.30E+03
8	3.62E+08	3.02E+03
9	3.84E+08	2.53E+03
10	4.44E+08	1.65E+03
11	5.34E+08	9.51E+02
12	5.98E+08	6.82E+02
13	6.13E+08	6.29E+02
14	7.02E+08	4.21E+02
15	7.74E+08	3.14E+02



۲. تابع جرم محصور در شعاع r ، $M(r)$ ، را به دست آورید.

راهنمایی: $3x^2 dx = d(x^3)$

۳. شعاع ستاره (R) را جایی تعریف می‌کنیم که چگالی آن 0.001 چگالی مرکز باشد. شعاع ستاره را به همراه خطا به دست آورید

۴. مقادیر جرم را به همراه خطا (M و ΔM) بر حسب کیلوگرم برای شعاع‌های جدول ۲ به دست آورده و در جدول پاسخنامه وارد کنید.

جدول ۲

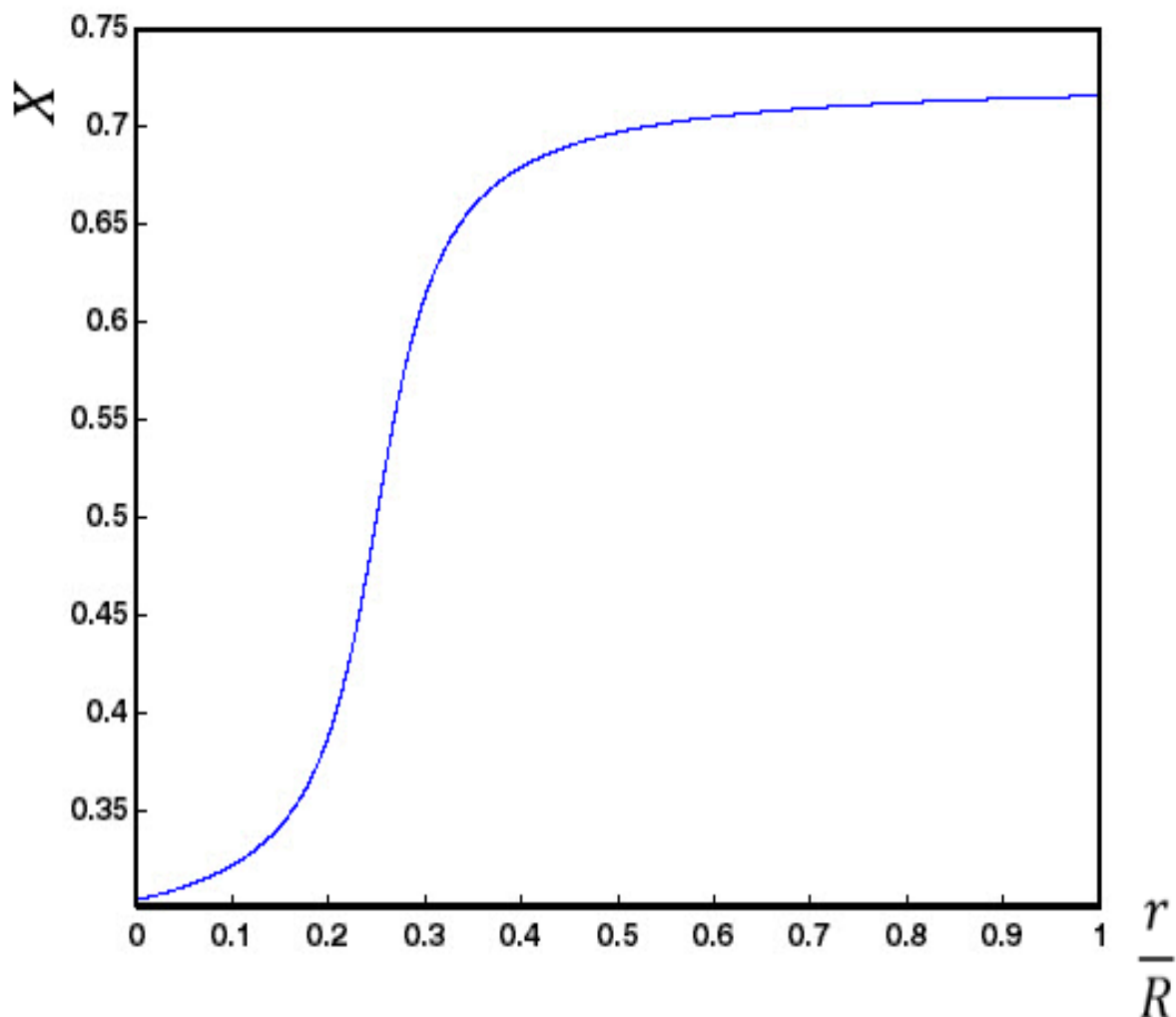
#	r (m)
1	0.00E+00
2	1.00E+08
3	2.00E+08
4	3.00E+08
5	4.00E+08
6	5.00E+08
7	6.00E+08
8	7.00E+08
9	8.00E+08
10	R

۵. حد پایین فشار را به همراه خطا (P و ΔP) بر حسب پاسکال برای شعاع‌های جدول ۲ به دست آورید.

راهنمایی: فرض کنید که در محاسبه حد پایین فشار، خطایی وارد نمی‌شود و فشار سطح برابر با صفر است.

۶. نمودار فشار بر حسب شعاع را رسم کنید. میله‌های خطا را نیز در نمودار نشان دهید.

۷. نمودار درصد جرمی هیدروژن برای این ستاره مطابق شکل ۱ است. با فرض این که جرم فلزات ناچیز است، دمای ستاره را به همراه خطا (ΔT و T) بر حسب کلون برای شعاع‌های جدول ۲ به دست آورید.



شکل ۱ - نمودار درصد جرمی هیدروژن بر حسب شعاع

۸. می‌دانیم که تولید انرژی درون ستاره با فرایند $p - p$ انجام می‌شود؛ یعنی

$$\epsilon = \epsilon_0 \rho T^4, \quad \epsilon_0 = 1.13 \times 10^{-34} \left(\frac{\text{W m}^3}{\text{kg}^2 \text{K}^4} \right)$$

درخشندگی را به همراه خطا (ΔL و L) برای شعاع‌های جدول ۲ به دست آورید

۹. دمای موثر ستاره (T_{eff}) را به همراه خطا گزارش کنید.



زاویه‌ی اختلاف منظر (۱۳۰ نمره) (طراح: علیرضا علوی)

در این بخش نیازی به محاسبه‌ی خطا نیست.

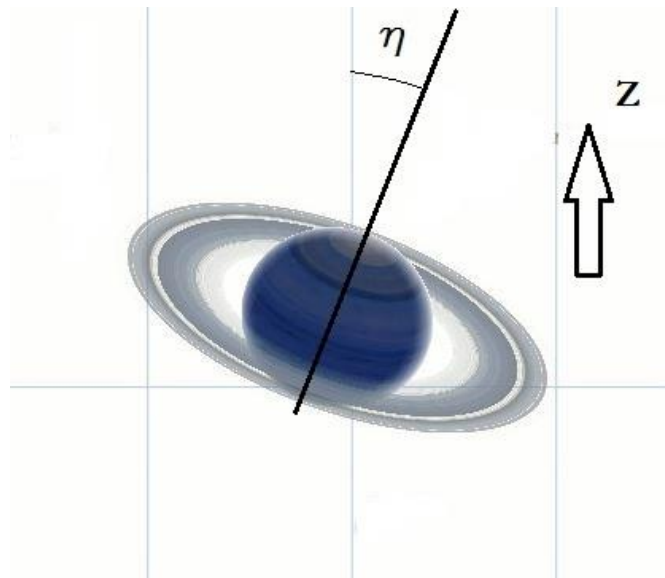
از سیاره‌ی زحل در زمان‌های مختلفی عکس‌برداری شده است. ۲۸ تصویری که در پیوست آزمون قرار دارند، با نرم‌افزار Starry Night تهیه شده‌اند و جهت سرسو در عکس اول به همراه خطوط راهنمای محلی مشخص شده است. جهت سرسو در مابقی تصاویر نیز مشابه تصویر اول است که از روی جهت نوشته‌ی انگلیسی هم مشخص است. تصاویر مستقیم می‌باشند و وارون نیستند. ترتیب زمانی تصاویر به ترتیب جدول ۳ است. در این جدول زمان‌ها نسبت به مبدأ زمانی دل‌خواهی سنجیده شده‌اند. می‌دانیم داده‌ها در شهری با عرض جغرافیایی کمتر از 30° - جمع‌آوری شده‌اند. میل صفحه‌ی مداری زحل نسبت به دایره‌ی البروج را $2/5^{\circ}$ در نظر بگیرید.

جدول ۳

#	زمان	#	زمان
1	0:00	15	14:00
2	1:00	16	15:00
3	2:00	17	16:00
4	3:00	18	17:00
5	4:00	19	18:00
6	5:00	20	19:00
7	6:00	21	19:30
8	7:00	22	19:45
9	8:00	23	20:00
10	9:00	24	20:15
11	10:00	25	20:45
12	11:00	26	21:30
13	12:00	27	22:30
14	13:00	28	23:30

۱۰. نمودار زاویه‌ی اختلاف منظر زحل بر حسب زمان را رسم کنید. توجّه کنید که زاویه‌ی اختلاف منظری که اینجا تعریف نموده‌ایم مطابق شکل ۲ و به صورت زیر است (در زمان عبور، $f = 0$ است).

$$\eta(t, \phi, \delta) = \eta_0 + f(\phi, \delta, t)$$



شکل ۲ - زاویه‌ی اختلاف منظر

۱۱. اثبات کنید که رابطه‌ی $f(\phi, \delta, H)$ بر حسب زاویه‌ساعتی زحل، تابعی فرد است.

۱۲. زمان عبورهای زحل را مشخص کنید و با ذکر دلیل عبور بالایی را مشخص کنید.

۱۳. زاویه‌ی اختلاف منظر زحل را در هنگام عبور بالایی گزارش کنید.

۱۴. با برآزش منحنی، عرض جغرافیایی ناظر و میل زحل را گزارش کنید.



روابط برازش خط راست

$$y = A + Bx$$

$$d_i = y_i - (A + Bx_i)$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

$$A = \bar{y} - B\bar{x}$$

$$(\Delta B)^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

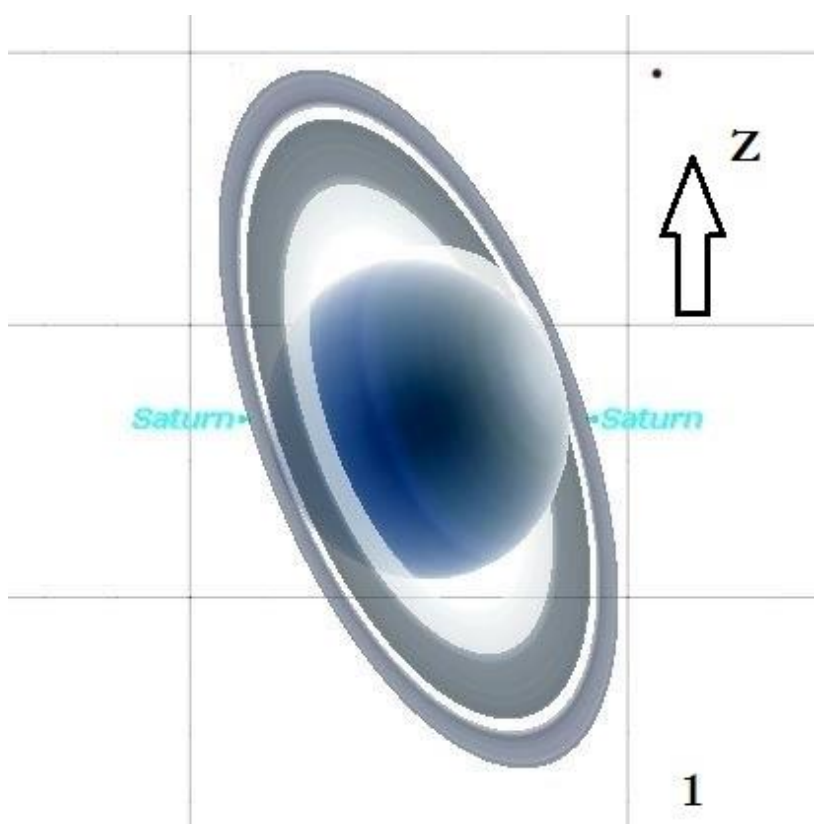
$$(\Delta A)^2 = \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \right) \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

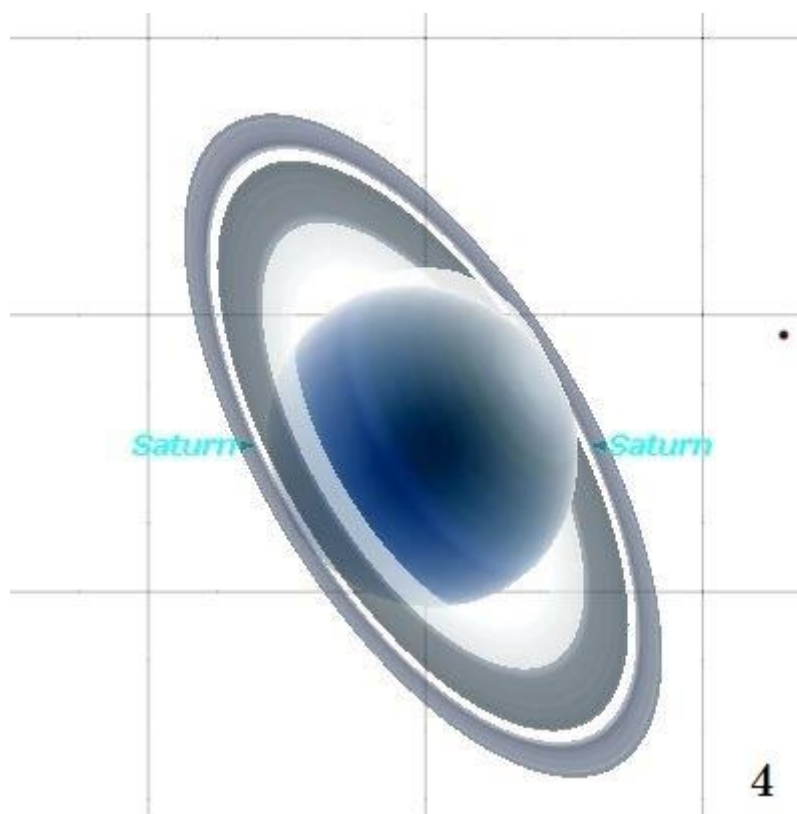
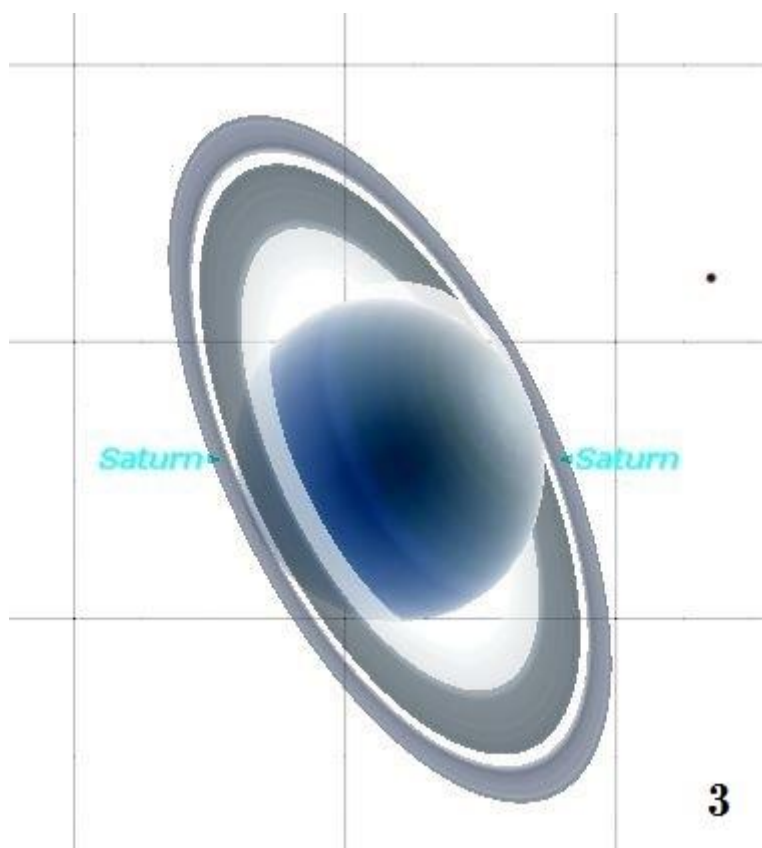
$$y = Bx$$

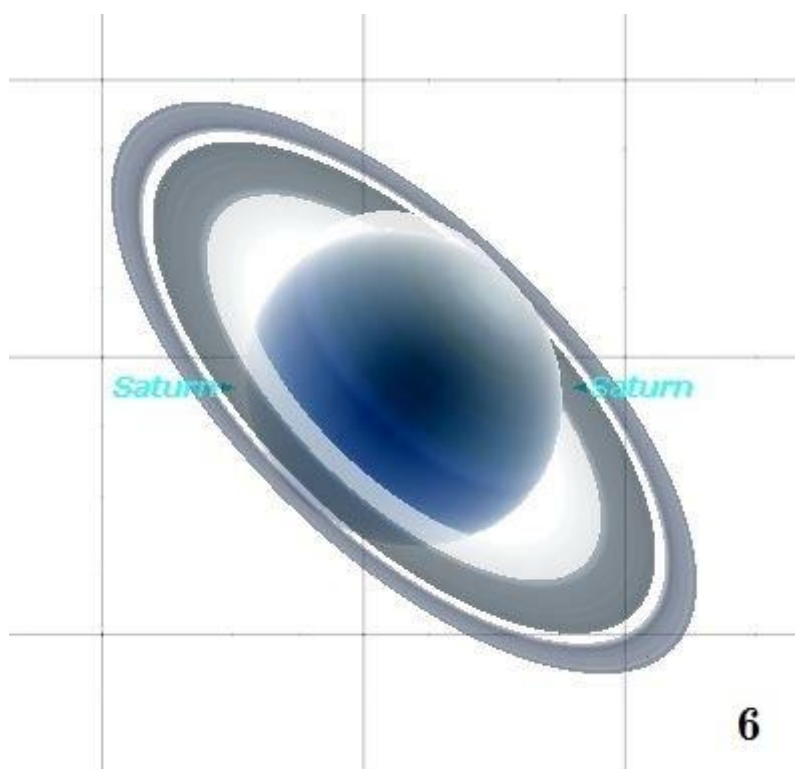
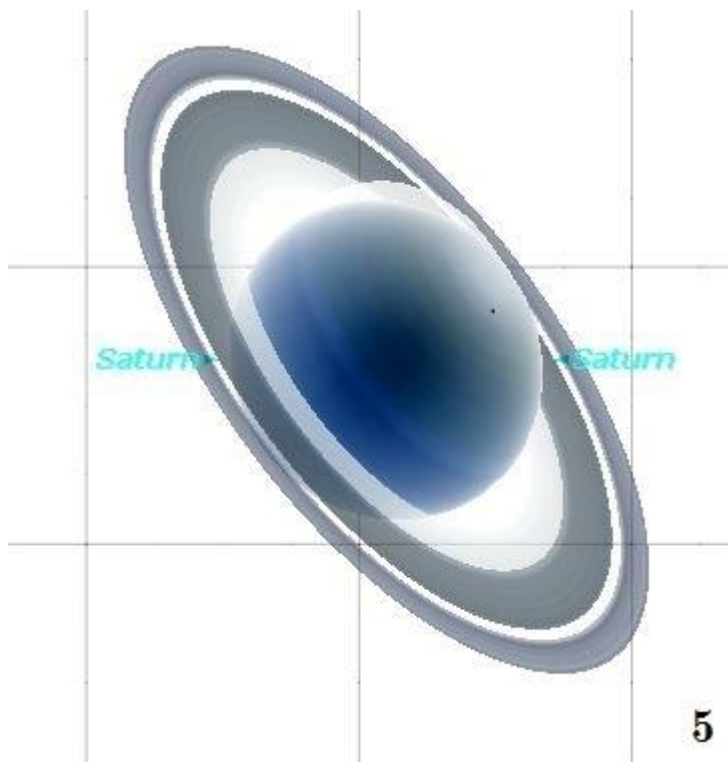
$$B = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

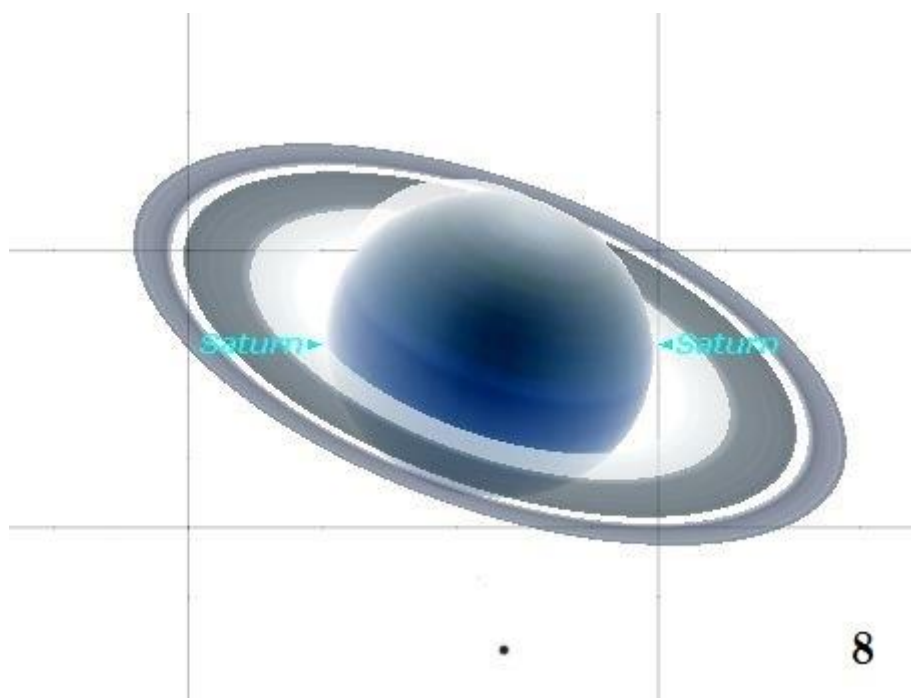
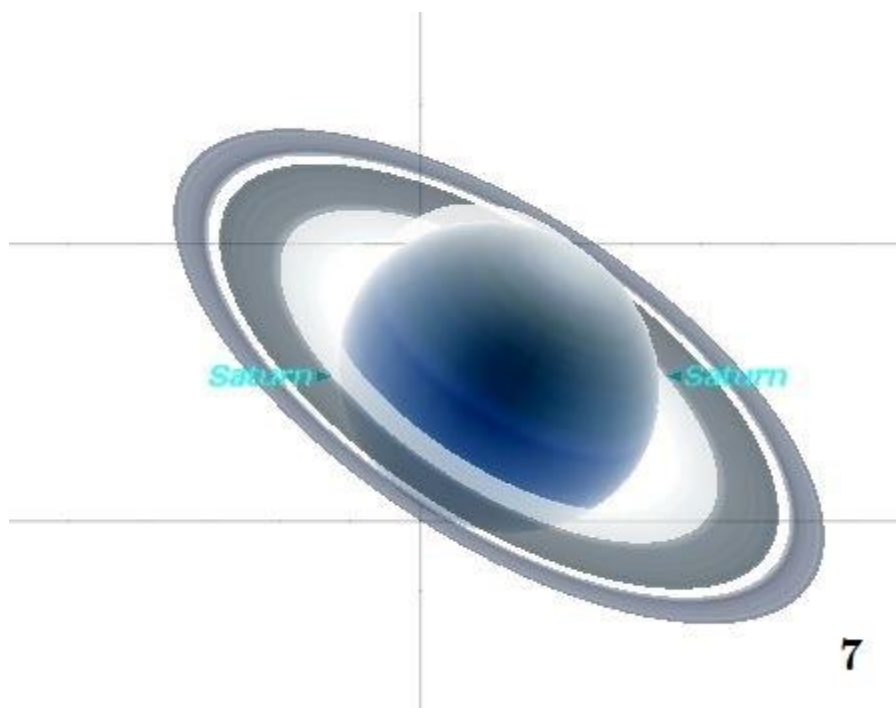
$$(\Delta B)^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 1}$$

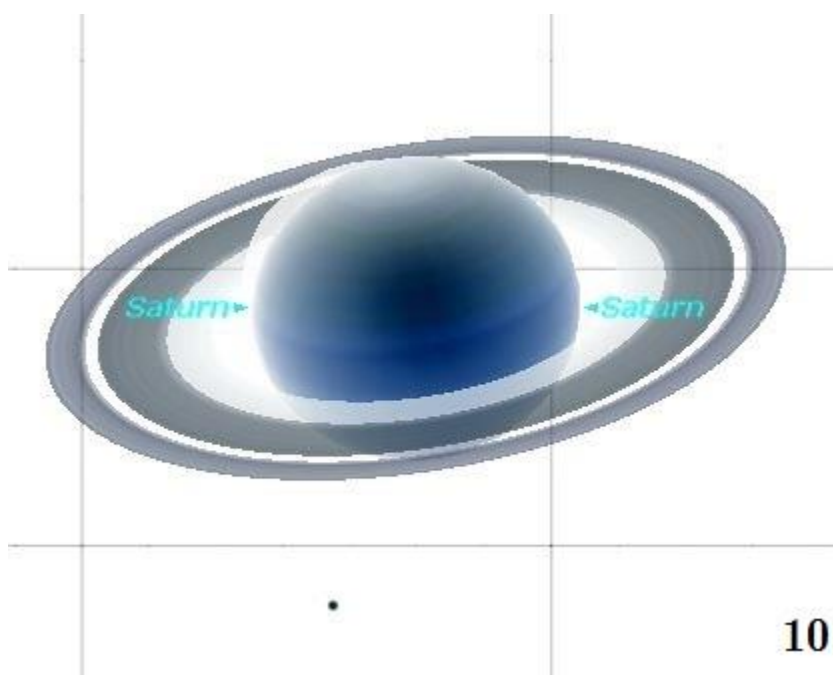
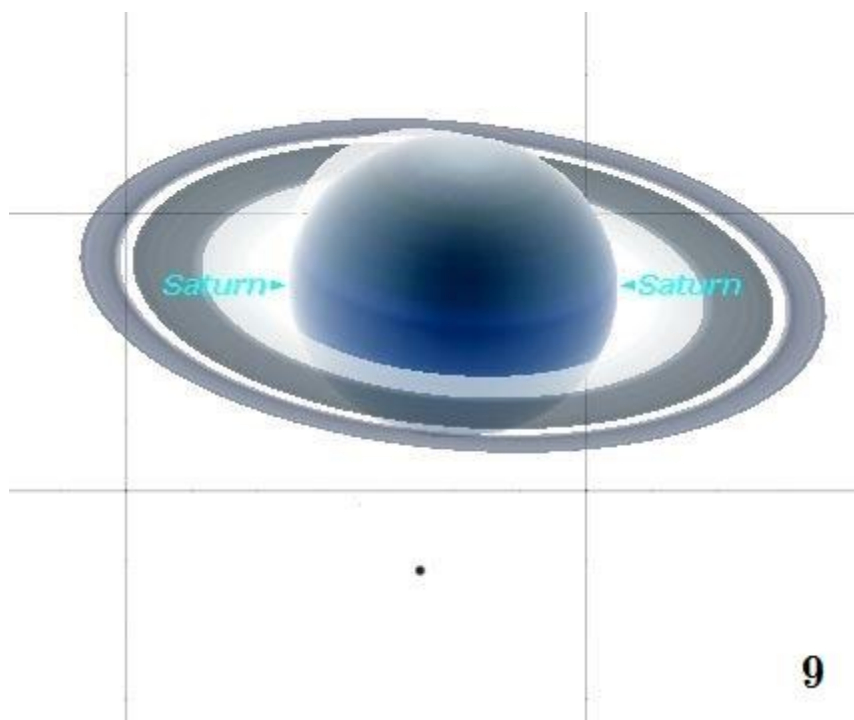
تصاویر سیاره زحل

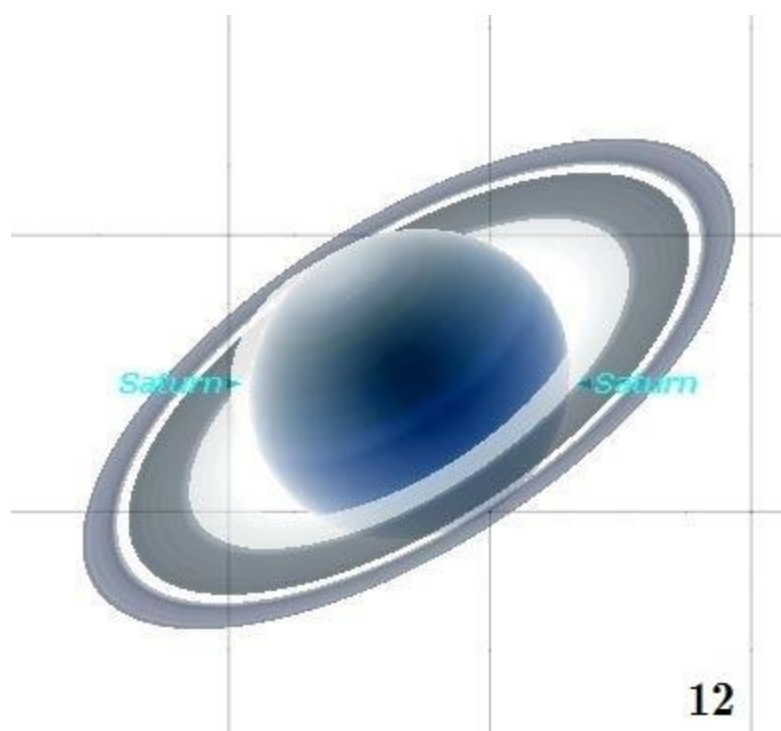
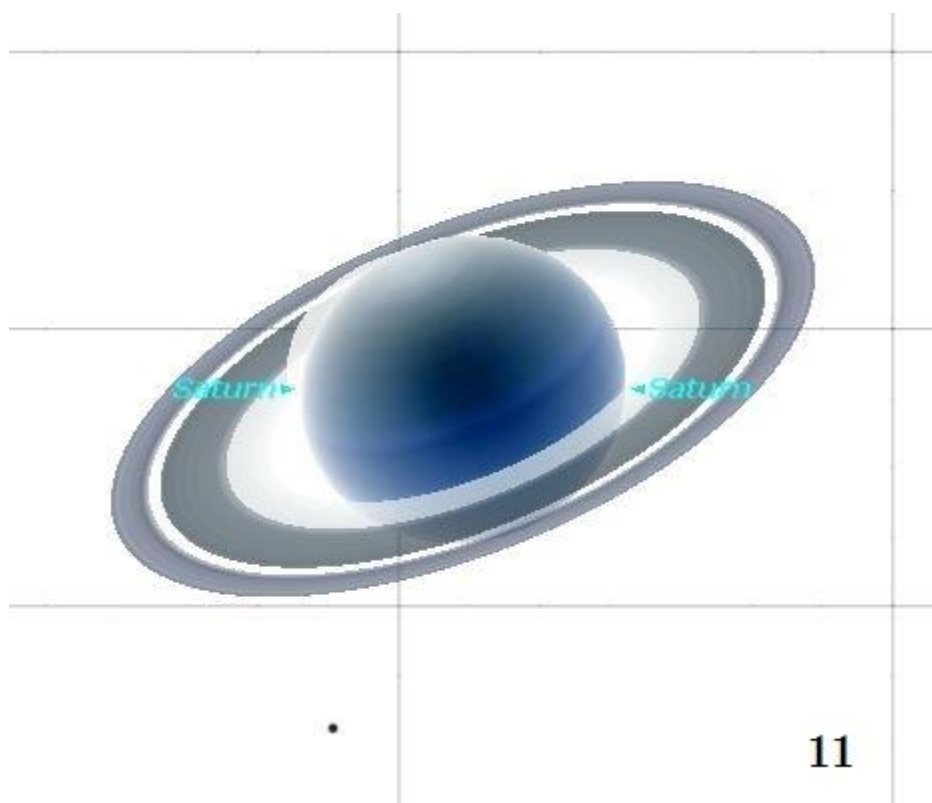




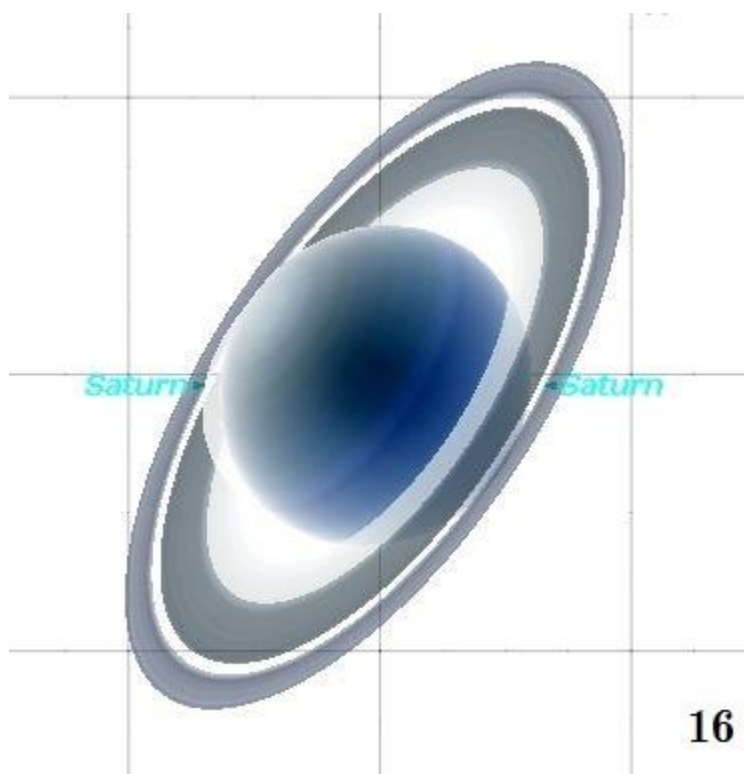
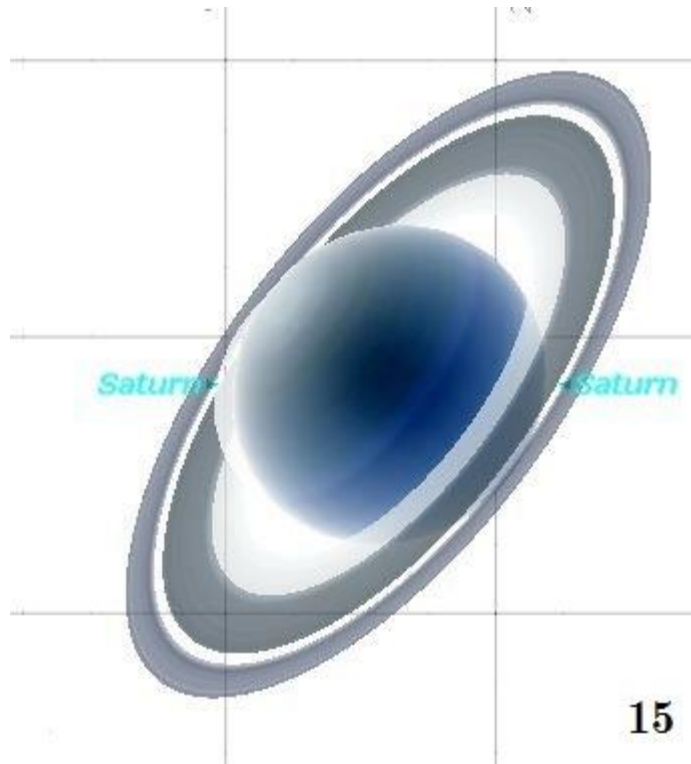


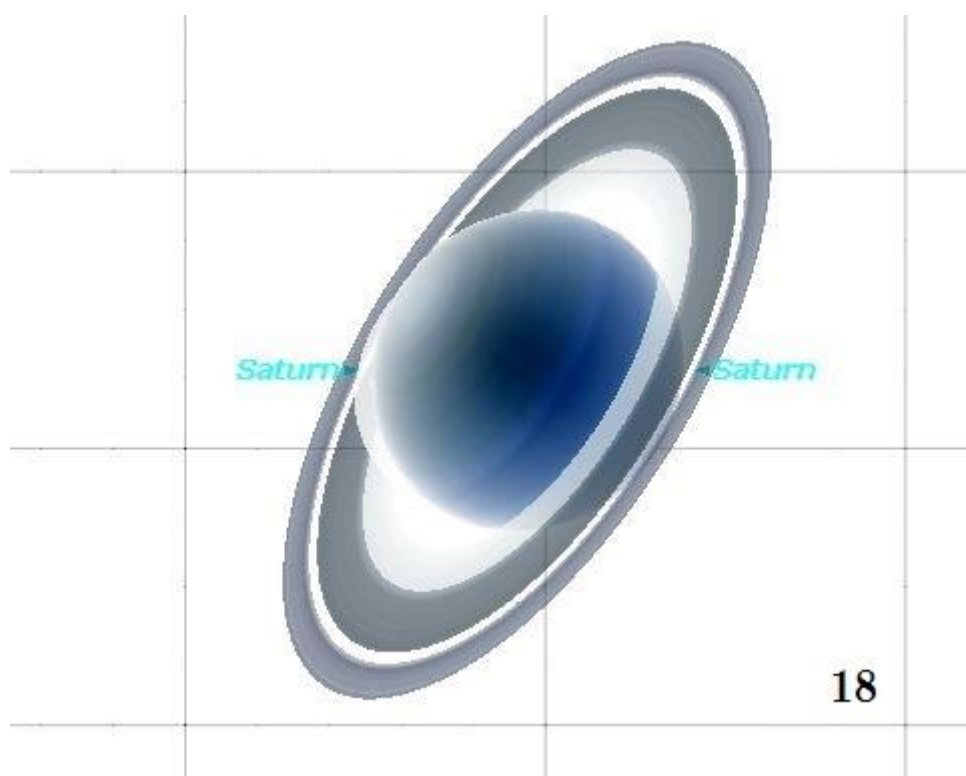
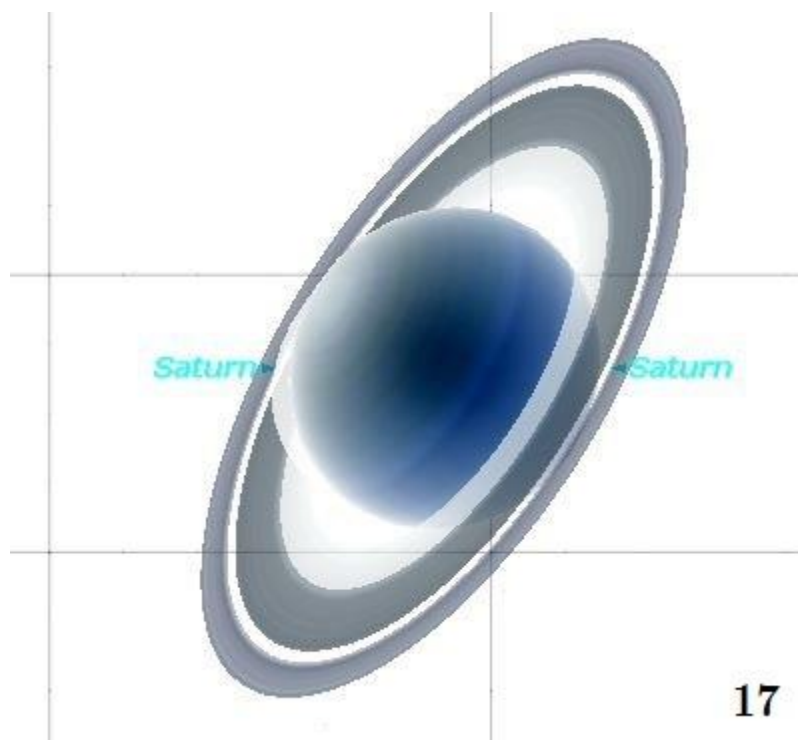


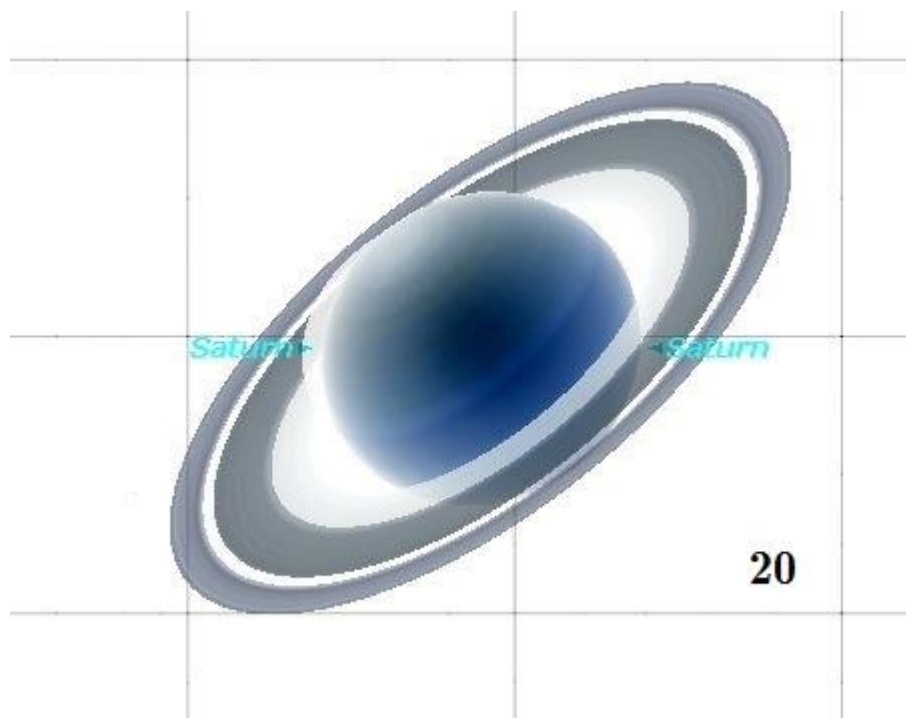
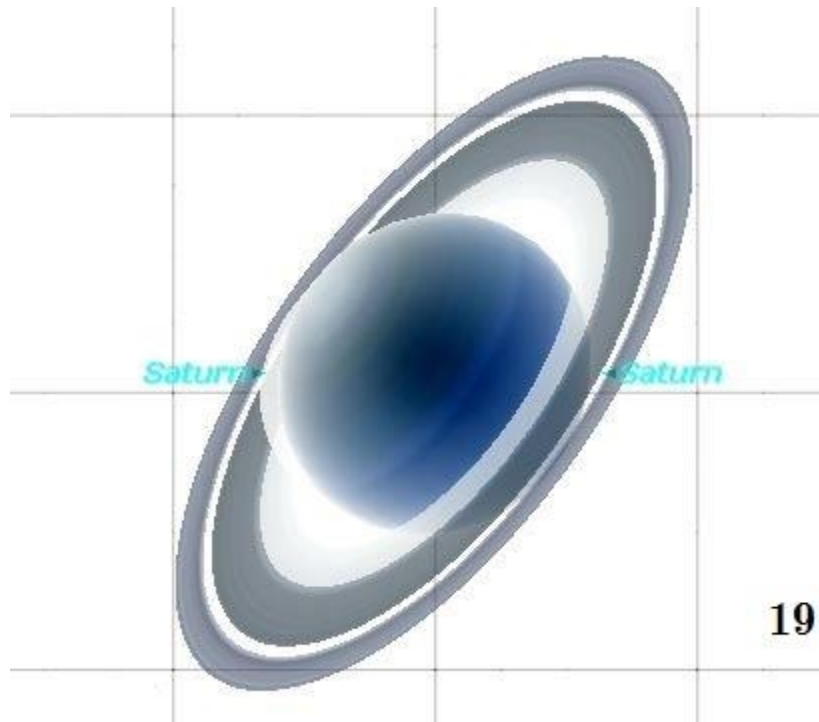


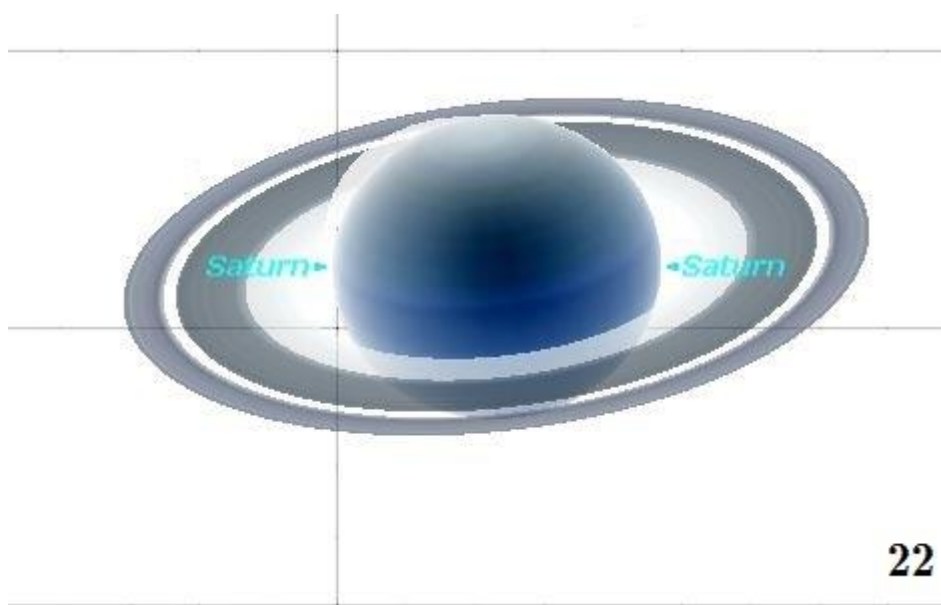
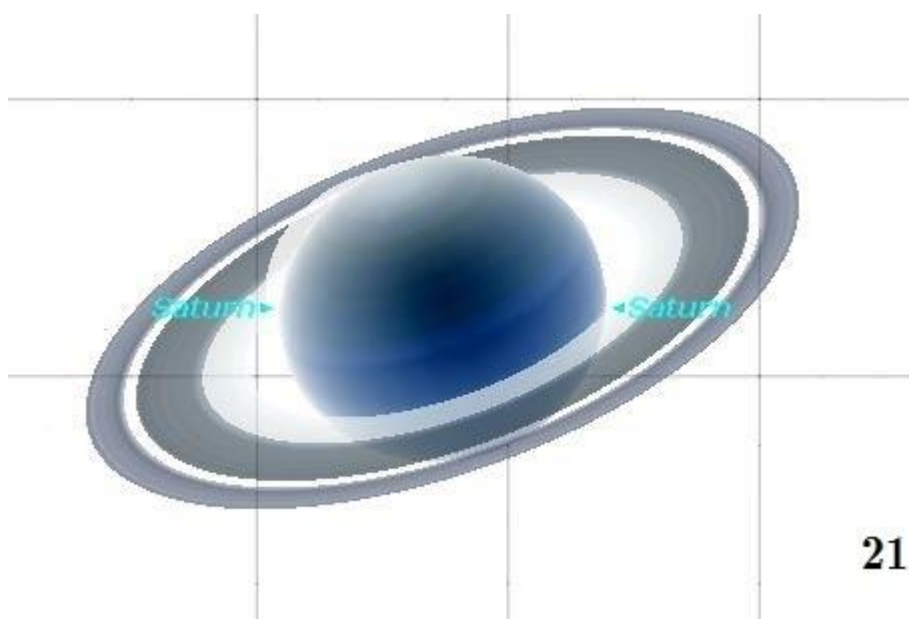


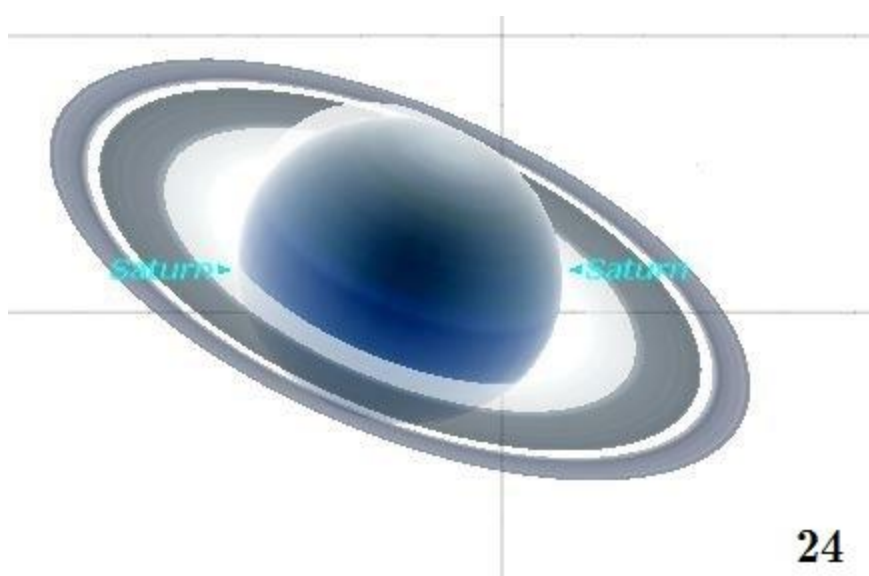
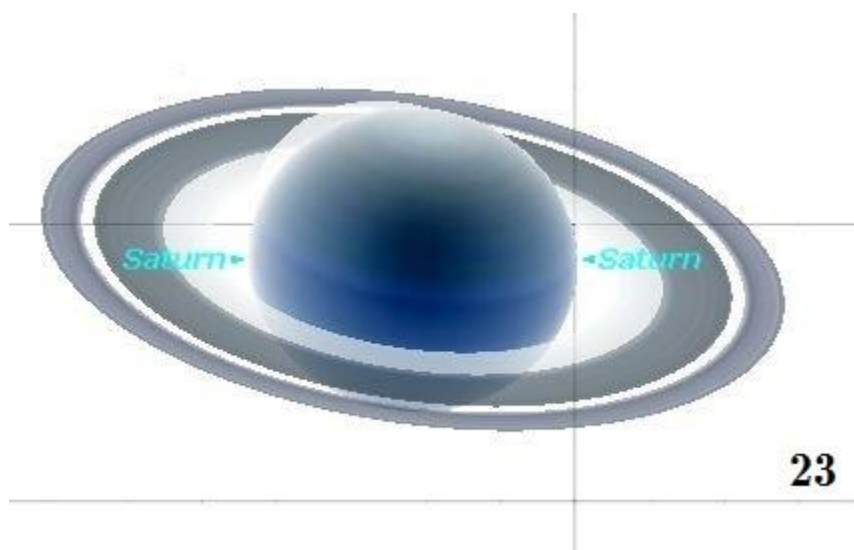


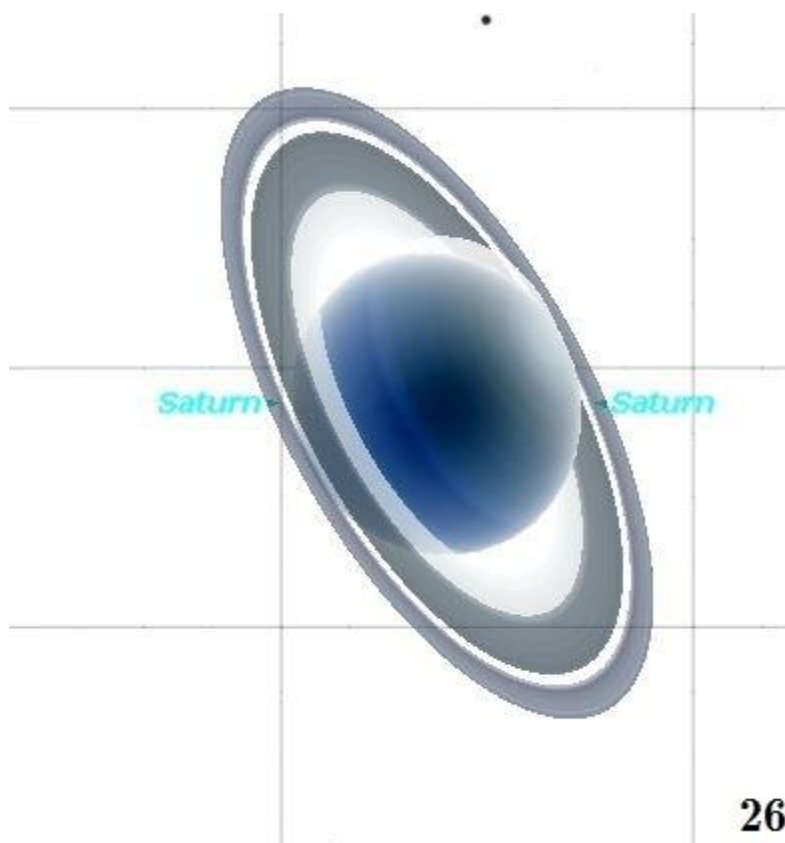


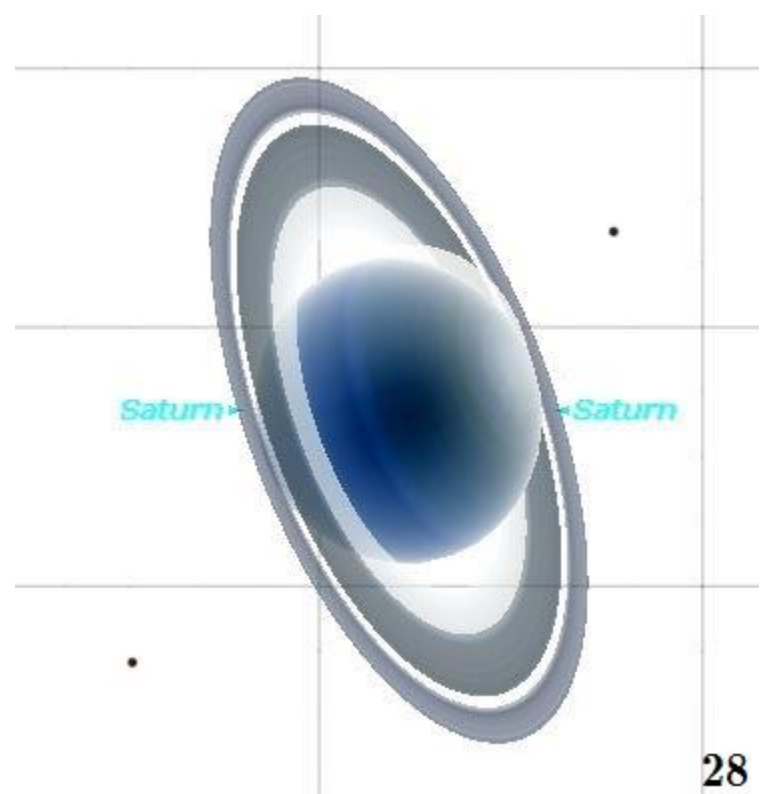
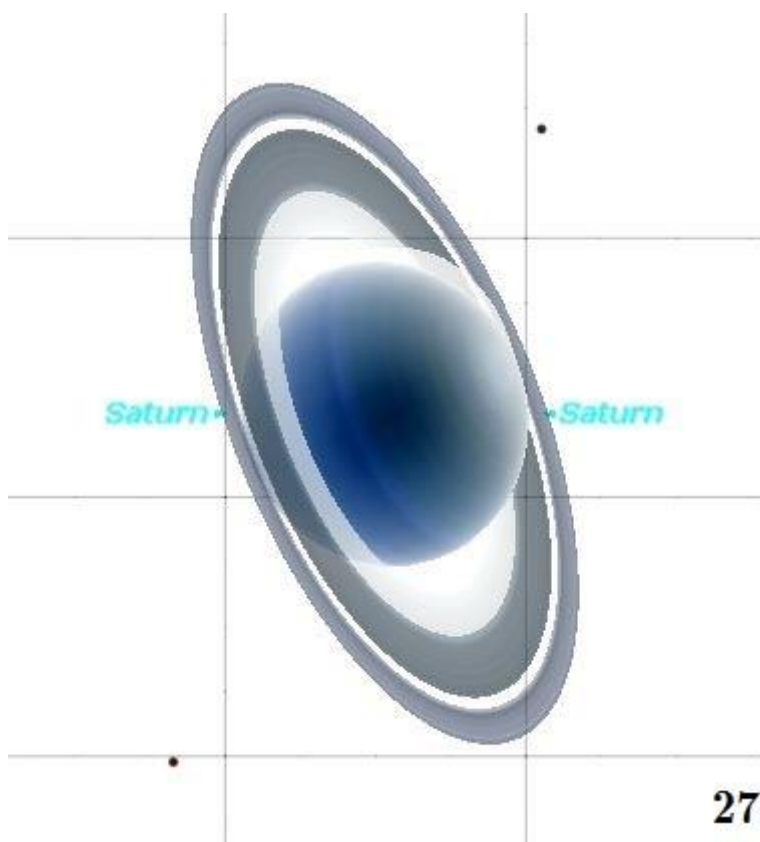












آزمون‌های تحلیل داده‌ی

دوره‌ی طلای ۹۵-۱۳۹۴

آزمون مفاهیم پایه‌ی تحلیل داده

تاریخ: ۵ اسفند ۱۳۹۴

مدت زمان: ۱۲۰ دقیقه

آزمون میان دوره‌ی تحلیل داده

تاریخ: ۱۸ فروردین ۱۳۹۵

مدت زمان: ۳۰۰ دقیقه

آزمون تحلیل داده با اکسل

تاریخ: ۲۷ مرداد ۱۳۹۵

مدت زمان: ۲۴۰ دقیقه

به نام خدا

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»



یازدهمین دوره‌ی طلای المپیاد نجوم و اخترفیزیک

بخش تحلیل داده

آزمون مفاهیم پایه‌ی تحلیل داده

۵ اسفند ۱۳۹۴

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه (۹:۰۰ تا ۱۱:۰۰)

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است به موارد زیر توجه فرمایید:

- (۱) این آزمون ۱۵ سؤال دارد و زمان آن ۱۲۰ دقیقه است.
- (۲) به همراه دفترچه‌ی سؤالات، دفترچه‌ی پاسخ‌نامه، ۲ کاغذ رسم نمودار و چرک‌نویس در اختیار شما قرار گرفته است.
- (۳) در این آزمون می‌توانید از ماشین حساب خودتان که قابلیت برنامه‌ریزی ندارد، استفاده کنید.
- (۴) همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی مجاز نیست.

©کلیه‌ی حقوق این سؤالات برای معاونت دانش‌پژوهان جوان محفوظ است.



ثوابت فیزیکی و نجومی

توجه! ثوابت درون جدول خطا ندارند.

مقدار	کمیت
6.67×10^{-11} $\text{m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1}$	ثابت جهانی گرانش G
6.63×10^{-34} J s	ثابت پلانک h
1.38×10^{-23} J K^{-1}	ثابت بولتزمن k
3.00×10^8 m s^{-1}	سرعت نور c
5.67×10^{-8} $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$	ثابت استفان-بولتزمن σ
6378 km	شعاع زمین R_{\oplus}
9.78 m s^{-2}	شتاب گرانش سطح زمین
1000 kg m^{-3}	چگالی آب

جدول بارم‌بندی سؤالات

سؤال	بارم	سؤال	بارم
۱	۶	۷	۱۰
۲	۳	۸	۸
۳	۱۲	۹	۱۰
۴	۶	۱۰	۶
۵	۴	۱۱	۱۲
۶	۶	۱۲	۱۴
		۱۳	۸
		۱۴	۱۰
		۱۵	۶

تشریحی

کوتاه پاسخ



سؤالات کوتاه‌پاسخ

توجه! در این سؤالات، نمره‌ای به راه حل تعلق نمی‌گیرد.

سؤال ۱ [طراح: شهاب‌الدین محین]: داده‌های جدول ۱ را به صورت درست گزارش کنید.

جدول ۱

#	گزارش اولیه
1	0.255 ± 0.04
2	86503 ± 3210
3	$225.378 \times 10^{-3} \pm 73 \times 10^{-5}$
4	$8.45 \text{ kpc} \pm 320 \text{ pc}$
5	352.523 ± 13.8431
6	$0.000246 \pm 0.00002678 M_{\odot}$

سؤال ۲ [طراح: محمدهادی ستوده]:

الف) ۸ میلی ثانیه‌ی قوسی (8 mas) چند رادیان هست؟

ب) در یک تقریب ساده برای تعیین شعاع مؤلفه‌ی کوچک یک دوتایی، می‌توان از رابطه‌ی زیر استفاده کرد.

$$R_s = \frac{v}{2} (t_b - t_a)$$

در این رابطه $v = 26.59 \frac{\text{km}}{\text{s}}$ سرعت نسبی، $t_a = 8.2^{\text{h}}$ زمان تماس اول و $t_b = 19.9^{\text{h}}$ زمان تماس دوم نسبت به یک مبدأ زمانی دلخواه است. شعاع این مؤلفه چه قدر است؟

سؤال ۳ [طراح: محمدهادی ستوده]:

الف) در عالمی که ستارگان آن به صورت یکنواخت توزیع شده‌اند، شار دریافتی تا فاصله‌ی r از رابطه‌ی $F = nLr$ به دست می‌آید که در آن $n = 1.02 \pm 0.05 \text{ pc}^{-3}$ و $L = 0.78 \pm 0.17 L_{\odot}$ است. شار دریافتی در فاصله‌ی 3 ± 238 پارسک را به دست آورید.

ب) فشار در عمق h از مایع برابر با $P = P_0 + \rho gh$ است. با توجه به مقادیر اندازه‌گیری شده‌ی $P_0 = 101325 \pm 3 \text{ Pa}$ در سطح آب‌های آزاد، فشار را در عمق 4 ± 70 متری اقیانوس بیابید.

ج) کسر ستارگان بدون غروب در شهر تهران ($\varphi = 35.4^\circ \pm 0.5^\circ$) چه قدر است؟



سؤال ۴ [طراح: شهاب‌الدین محین]: با یک فوتومتر با دقت 0.1 قدر، قدر دو ستاره‌ی A و B را اندازه گرفته‌ایم (جدول ۲). قدر این دو ستاره را به همراه خطا گزارش کنید.

جدول ۲ - قدر ستاره‌های A و B

#	m_A	m_B
1	6.3	2.0
2	4.0	2.1
3	5.8	2.0
4	3.6	2.3
5	6.0	2.1
6	4.7	2.0
7	7.9	2.2
8	5.2	2.1
9	3.7	2.2
10	5.7	2.1

سؤال ۵ [طراح: شهاب‌الدین محین]: احتمال مشاهده‌ی یک کهکشان بیضوی، مارپیچی و نامنظم به ترتیب برابر با مقادیر زیر است. k چه مقدارهایی می‌تواند باشد؟

$$\frac{0.5}{k-1} \text{ و } 0.8, \frac{0.3}{k-3}$$



سؤال ۶ | طراح: شهاب‌الدین محین:

قدر ظاهری کهکشان آندرومدا را با روش‌های مختلف به دست آورده‌ایم و در جدول ۳ ذکر کرده‌ایم. قدر آن را گزارش کنید.

جدول ۳

#	m	Δm	فراوانی
1	4.6	0.4	6
2	4.6	0.3	7
3	4.6	0.8	15
4	4.56	0.09	11
5	4.4	0.5	9
6	4.4	0.4	13
7	4.5	0.3	15
8	4.7	0.4	8
9	4.3	0.7	9
10	4.49	0.03	14

سؤالات تشریحی

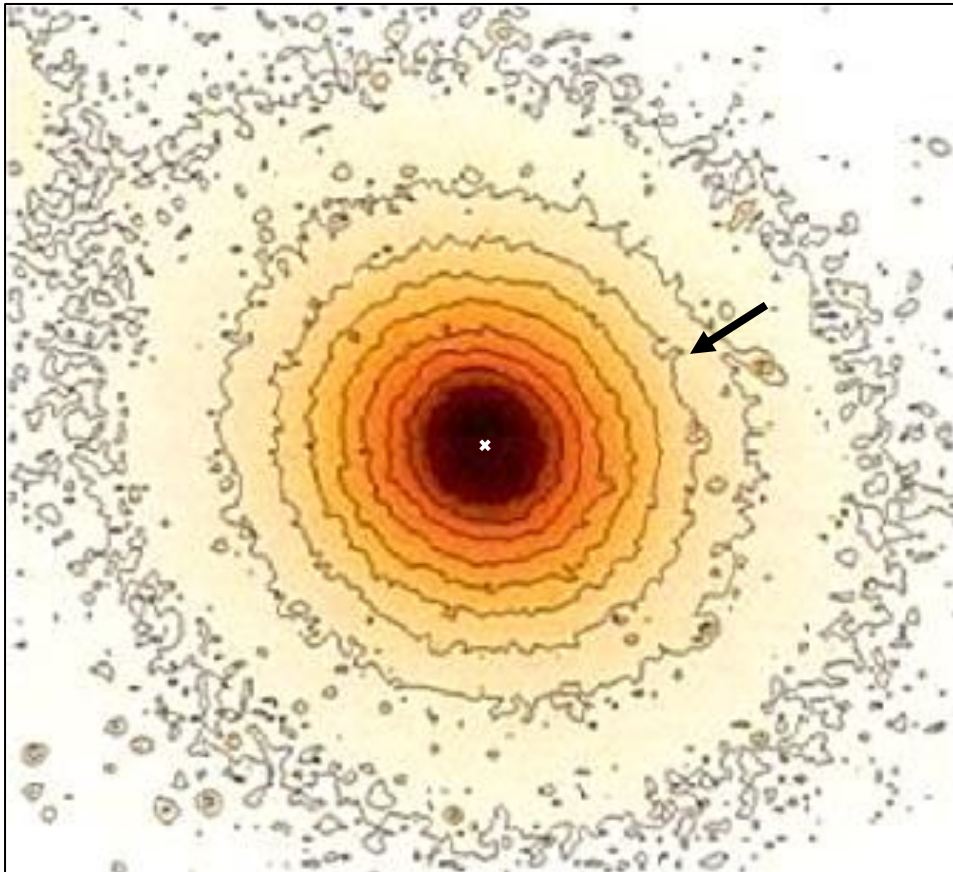
سؤال ۷ | طراح: محمد‌هادی ستوده: به کمک رابطه‌ی نشر خطا، خطای توابع زیر را بیابید.

$$f(x) = (x_1 + x_2 + \dots + x_N)^n$$

$$f(x) = (x_1 \times x_2 \times \dots \times x_N)^n$$

سؤال ۸ [طراح: محمد‌هادی ستوده]:

شکل ۱ منحنی‌های هم‌نور^۱ کهکشان بیضوی غول‌پیکر NGC 4278 را نشان می‌دهد که از نوع E0 است. مرکز و منحنی معرف شعاع نیم‌نور^۲ این کهکشان در تصویر مشخص شده است.



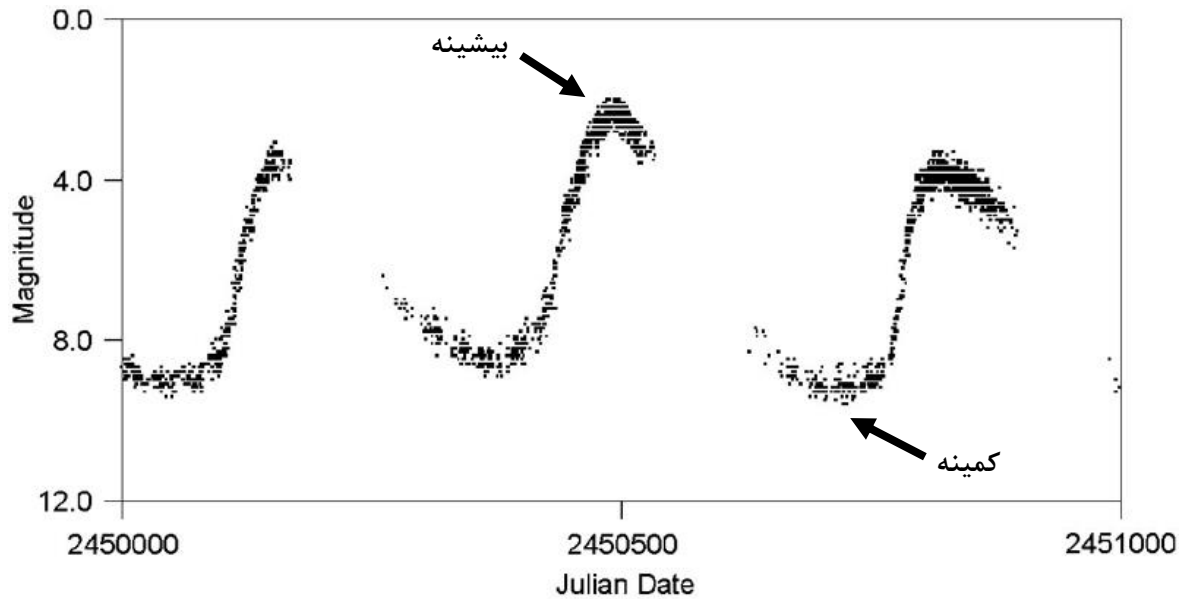
شکل ۱ - منحنی‌های هم‌نور NGC 4278

شعاع نیم‌نور کهکشان را به همراه خطا گزارش کنید. (مقیاس تصویر $4.2 \frac{\text{kpc}}{\text{cm}}$ است).

^۱ Isophote

^۲ Half-Light Radius

سؤال ۹ [طراح: محمد‌هادی ستوده]: شکل ۲ منحنی نوری ستاره‌ی متغیر *o Ceti* را نشان می‌دهد.



شکل ۲ - منحنی نوری *o Ceti*

به دلیل تعداد زیاد داده‌ها، نمودار ضخیم به نظر می‌رسد. نسبت انرژی دریافتی از بیشینه‌ی مشخص شده به کمینه‌ی مشخص شده چه قدر است؟

سؤال ۱۰ [طراح: شهاب‌الدین محین]: قرمزگرایی خوشه‌ی کهکشان گیسو را چندین بار اندازه گرفته‌ایم. $Z_{coma} \in (0.015, 0.019)$ و توزیع آن یک‌نواخت است. انحراف معیار و میانگین Z_{coma} را به دست آورید.

سؤال ۱۱ [طراح: محمد‌هادی ستوده]: جدول ۴ دوره‌ی تناوب و نیم‌محور اطول سیارات منظومه‌ی Kepler-102 را نشان می‌دهد.

جدول ۴

#	دوره‌ی تناوب (روز)	نیم‌محور بزرگ (AU)
e	16.15 ± 0.25	0.116 ± 0.008
d	10.31 ± 0.07	0.085 ± 0.005
f	27.5 ± 0.3	0.166 ± 0.009
c	7.07 ± 0.21	0.067 ± 0.012
b	5.29 ± 0.11	0.055 ± 0.006

ضمن خطی‌سازی داده‌ها، آن را به همراه خطا در نمودار مناسب رسم کنید. با رسم منحنی مناسب در نمودار، جرم ستاره‌ی مرکزی را گزارش کنید.



سؤال ۱۲ | طراح: شهاب‌الدین محین:

یکی از راه‌های به دست آوردن دمای ستاره، طیف‌سنجی است. از یک ستاره طیف‌سنجی شده است و شار دریافتی به‌هنگار شده بر حسب طول موج در جدول ۵ گنجانده شده است. طول موج بر حسب آنگستروم می‌باشد. به دلیل اثر دوپلر ناشی از جو ستاره و عوامل غیر ستاره‌ای شاهد پهن‌شدگی هستیم. به داده‌ی زیر نمودار گاوسی‌مانند برازش کنید.

راهنمایی:
$$y = 1 - \frac{N_0}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$

جدول ۵

#	$\lambda(\text{\AA})$	F
1	5095.864	1.000
2	5096.397	0.880
3	5096.617	0.708
4	5096.804	0.679
5	5096.996	0.811
6	5097.240	0.962
7	5097.596	0.999

سؤال ۱۳ | طراح: شهاب‌الدین محین:

به تعداد خوشه‌های کروی یک کهکشان در بازه‌ی درخشندگی $(L - \delta, L + \delta)$ ، تابع درخشندگی خوشه‌ی کروی (GCLF) می‌گویند. L درخشندگی خوشه‌ی کروی است. می‌توان نشان داد که GCLF توزیع گاوسی است. میانگین قدر ظاهری خوشه‌های کروی کهکشان آندرومدا $\bar{m} = 14.5$ و انحراف معیار آن $\sigma = 1.2$ است.

الف) چند درصد از خوشه‌های کروی آندرومدا قدر ظاهریشان بین ۱۳ تا ۱۵ است؟

ب) چند درصد از خوشه‌های کروی آندرومدا روشن‌تر از خوشه‌ی کروی قدر ۱۲ هستند؟



سؤال ۱۴ | طراح: شهاب‌الدین محین: داده‌های جدول ۶ را در مقیاس مناسب رسم کنید.

جدول ۶

#	x	y
1	2.38	26.4
2	3.34	7.33
3	3.39	6549
4	5.87	769
5	5.51	20.5
6	2.45	2087
7	3.92	6.02
8	4.99	4873

سؤال ۱۵ | طراح: شهاب‌الدین محین: ثابت کنید در تابع توزیع پواسون $\mu \leq mod$ است.



روابط برازش خطّ راست

$$y = A + Bx$$

$$d_i = y_i - (A + Bx_i)$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

$$A = \bar{y} - B\bar{x}$$

$$(\Delta B)^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

$$(\Delta A)^2 = \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \right) \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

$$y = Bx$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

$$(\Delta B)^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 1}$$

جدول انتگرال تابع توزیع گاوسی

$$(\bar{x} = ., \quad \sigma^2 = 1)$$

Standard Normal Cumulative Probability Table



Cumulative probabilities for POSITIVE z-values are shown in the following table:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998

به نام خدا

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»



یازدهمین دوره‌ی طلای المپیاد نجوم و اخترفیزیک

بخش تحلیل داده

آزمون میان‌دوره

۱۸ فروردین ۱۳۹۵

مدت آزمون: ۳۰۰ دقیقه (۸:۰۰ تا ۱۳:۰۰)

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است به موارد زیر توجه فرمایید:

- (۱) این آزمون ۱۵ سؤال دارد و زمان آن ۳۰۰ دقیقه است.
- (۲) به همراه دفترچه‌ی سؤالات، دفترچه‌ی پاسخ‌نامه، ۳ کاغذ رسم نمودار، ۱ جدول، پرگار، نقاله، خط‌کش و چرک نویس در اختیار شما قرار گرفته است.
- (۳) در این آزمون می‌توانید از ماشین حساب خودتان که قابلیت برنامه‌ریزی ندارد، استفاده کنید.
- (۴) همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی مجاز نیست.

ح) کلیه‌ی حقوق این سؤالات برای معاونت دانش‌پژوهان جوان محفوظ است.



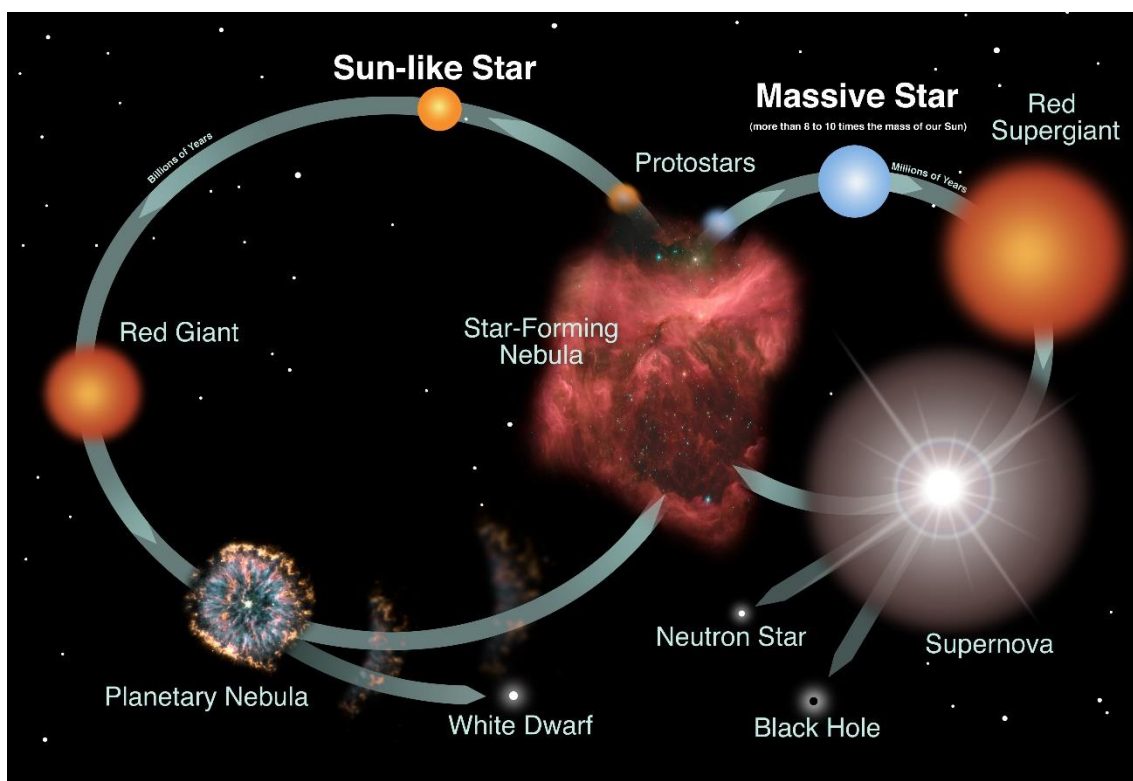
ثوابت فیزیکی و نجومی

توجه! ثوابت درون جدول خطا ندارند.

کمیت	مقدار
G	ثابت جهانی گرانش $\text{m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1}$ 6.67×10^{-11}
c	سرعت نور m s^{-1} 3.00×10^8
pc	پارسک m 3.09×10^{16}
ly	سال نوری m 9.46×10^{15}
L_{\odot}	درخشندگی خورشید W 3.85×10^{26}
	قدر مطلق خورشید 4.72
M_{\odot}	جرم خورشید kg 1.99×10^{30}
	عمر خورشید Gyr 10

تحوّل ستاره‌ای و محیط (۱۵۰ نمره) (طراح: محمد‌هادی ستوده)

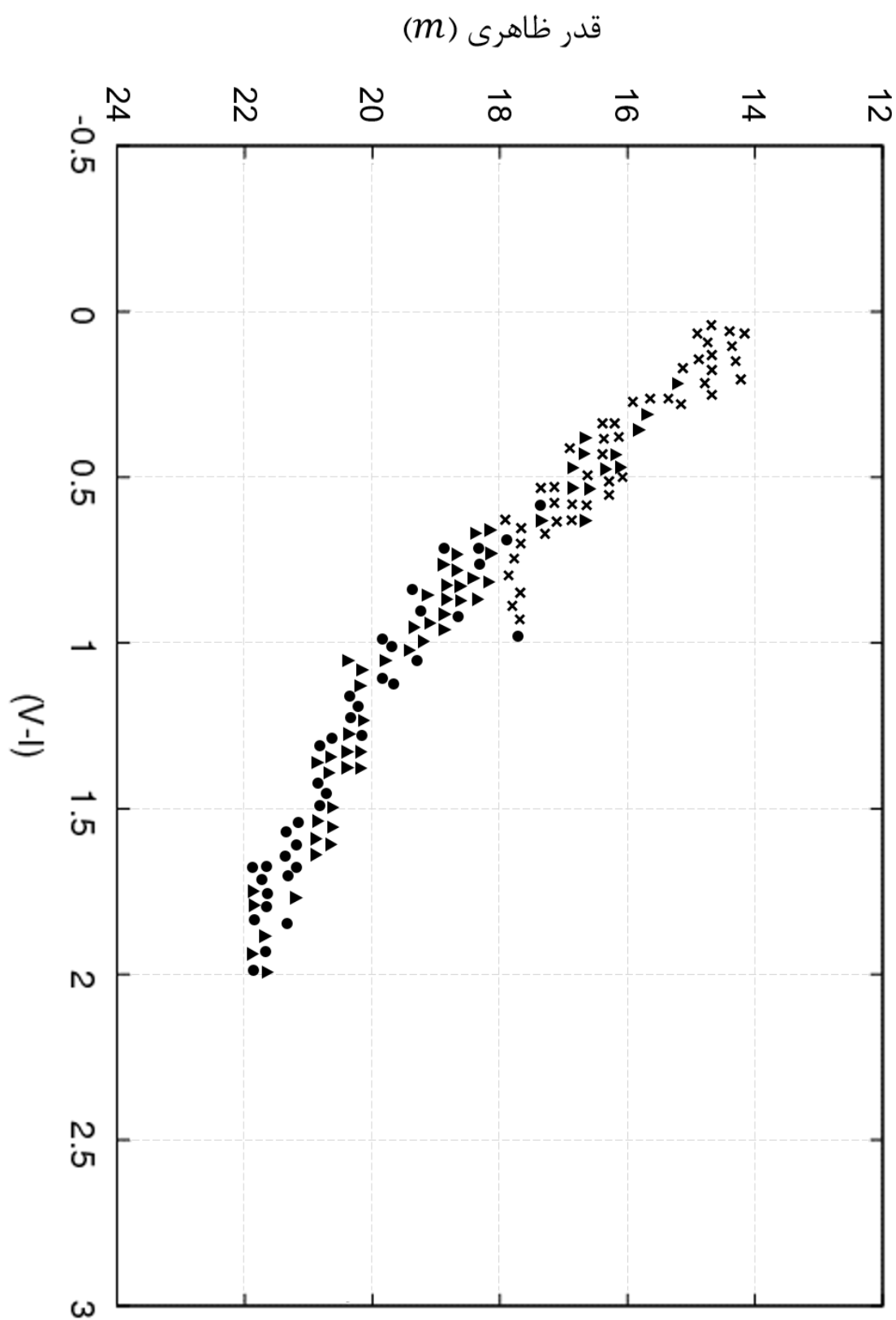
یکی از ابعاد بررسی جمعیت‌های ستاره‌ای، آگاهی از فرایند شکل‌گیری و تحوّل ستارگان در آن‌ها است. این کار با هدف تحلیل شیوه‌ی تبادل گاز میان ستارگان و محیط و نحوه‌ی تغییر فلزیت انجام می‌گیرد. یکی از ابزارهای انجام این تحلیل، تابع جرم اولیه است که به کمک آن احتمال شکل‌گیری ستارگان با جرم‌های مختلف در یک دوره‌ی ستاره‌زایی تعیین می‌شود.



شکل ۱ - تبادل گاز میان ستارگان و محیط

با وجود پیشرفت مدل‌های تحوّل ستاره‌ای، تاکنون تئوری کاملی در این زمینه ارائه نشده است و بیشتر دانش ما نتیجه بررسی‌های رصدی است. البته مشاهدات رصدی نیز تحت تأثیر عواملی مانند کمیاب بودن ستارگان سنگین، سخت بودن مشاهده‌ی ستارگان کم‌جرم، تغییر آهنگ ستاره‌زایی با زمان و خاموشی میان‌ستاره‌ای هستند که برخی از آن‌ها را می‌توان تصحیح کرد.

شکل صفحه‌ی بعد، نمودار H-R یک خوشه‌ی ستاره‌ای را نشان می‌دهد که در فاصله‌ی ۳۲۶۰۰ سال نوری از ما قرار دارد. اثر خاموشی میان‌ستاره‌ای در این نمودار تصحیح شده است. فرض کنید ستارگانی که در حال خروج از رشته‌ی اصلی هستند، در زمان صفر به وجود آمده‌اند.



شکل ۲- نمودار H-R خوشه‌ی ستاره‌ای (مفهوم نمادها: \times ستاره ۱۰ | \blacktriangle ستاره ۱۰۰ | \bullet ستاره ۱۰۰۰)
ستارگان در حال خروج، هنوز عضو رشته‌ی اصلی هستند.

در این بخش لازم است اطلاعات خواسته شده را در جدول پاسخنامه یادداشت کرده و در پایان امتحان، به همراه پاسخنامه‌ی خود تحویل دهید.

تعیین تابع جرم اولیه، مستلزم مشخص شدن توزیع فعلی ستارگان است. این کار با شمارش ستارگان در بازه‌های مختلف قدر مطلق (معمولاً به طول ۰/۵) انجام می‌گردد.

در یک زمان مشخص، تعداد ستارگان حاضر در رشته‌ی اصلی دارای قدر مطلق بین M و $M + dM$ ، به کمک تابع درخشندگی^۱ (Φ_M) مشخص می‌شود.

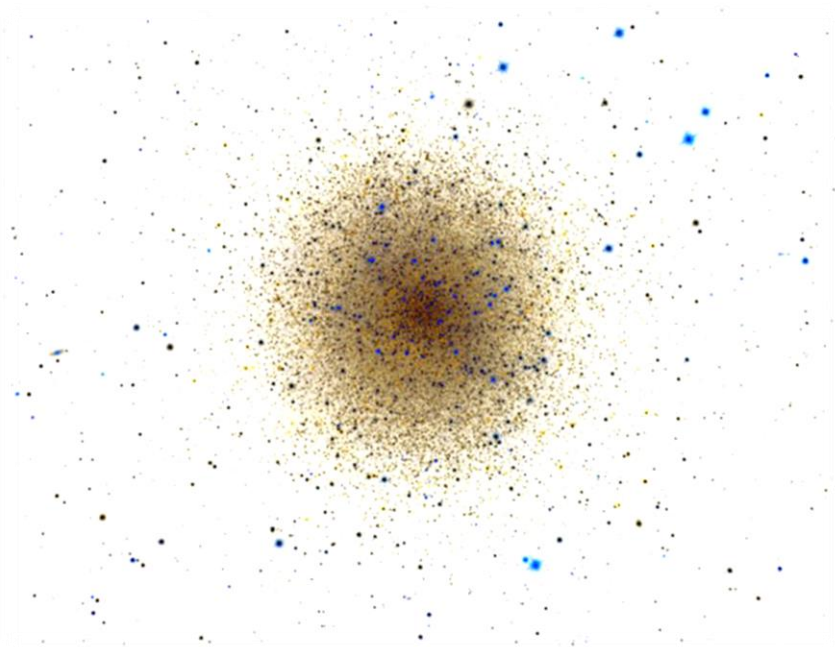
$$dN = \Phi_M dM$$

۱. با توجه به بازه‌های قدر ظاهری در جدول پاسخنامه، نمودار فراوانی ($\log \Phi_M$ بر حسب بازه‌های قدر مطلق) را برای ستارگان این خوشه رسم کنید.

تعداد کل ستارگان تشکیل شده در طول یک دوره‌ی ستاره‌زایی که دارای قدر مطلق بین M و $M + dM$ هستند، به کمک تابع درخشندگی اولیه^۲ (Ψ_M) تعیین می‌شود.

$$dN' = \Psi_M dM$$

با آگاهی از چگونگی انجام شدن فرایند ستاره‌زایی در خوشه، می‌توان با داشتن Φ_M ، Ψ_M را تعیین کرد.



شکل ۳- یک خوشه‌ی کروی جوان (این شکل تأثیری در حل مسئله ندارد).

^۱ Luminosity Function

^۲ Initial Luminosity Function



فرض کنید ستاره‌زایی از ابتدای شکل‌گیری خوشه شروع شده و تا همیشه ادامه می‌یابد. در این مدت، تنها یک دوره ستاره‌زایی اتفاق می‌افتد که در طول آن، آهنگ تشکیل ستاره^۳ برای هر دسته از ستارگان طبق رابطه‌ی زیر کند می‌شود؛ $(SFR)_0 = 4.5 \text{ Gyr}$.

$$(SFR) = (SFR)_0 e^{-t/t_*}$$

۲. اگر عمر رشته‌ی اصلی ستارگان را با t_{ms} نمایش دهیم، برای هر دسته رابطه‌ی بر حسب $(SFR)_0$ ، t_* و t_{ms} برای تعداد ستارگان حاضر در رشته‌ی اصلی تا زمان t بیابید.

۳. با توجه به روابطی که به دست آوردید، مقدار تابع درخشندگی اولیه را برای هر بازه‌ی قدر مطلق به دست آورده و در جدول یادداشت کنید. تمامی فرض‌های انجام شده و روش حل خود را به طور کامل توضیح دهید. می‌توانید از رابطه‌ی جرم-درخشندگی $L \propto M^{3.3}$ استفاده کنید.

تعداد کل ستارگان تشکیل شده در طول یک دوره‌ی ستاره‌زایی که دارای جرم بین M و $M + dM$ هستند، به کمک تابع جرم اولیه^۴ (ξ) تعیین می‌شود.

$$dN = \xi(M) dM, \quad \xi = \xi_0 M^{-\alpha}$$

۴. ضمن به دست آوردن مقدار ξ برای هر بازه، با رسم نمودار مناسب، ثوابت ξ_0 و α را به همراه خطایشان بیابید و انحراف نسبی α را از مقدار رصدی $\alpha_{obs} = 2.35$ به دست آورید.

۵. اگر حد بالای جرم ستارگان در این خوشه $130 M_\odot$ باشد، جرم کل ستارگان تشکیل شده در خوشه را در این دوره‌ی ستاره‌زایی به همراه خطا به دست آورید.

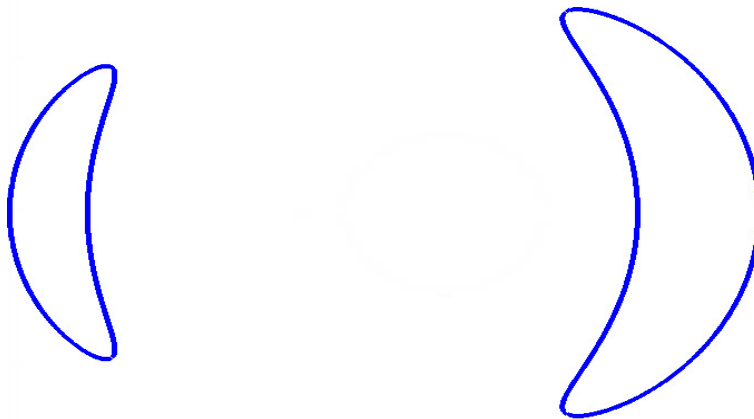
^۳ Star Formation Rate

^۴ Initial Mass Function

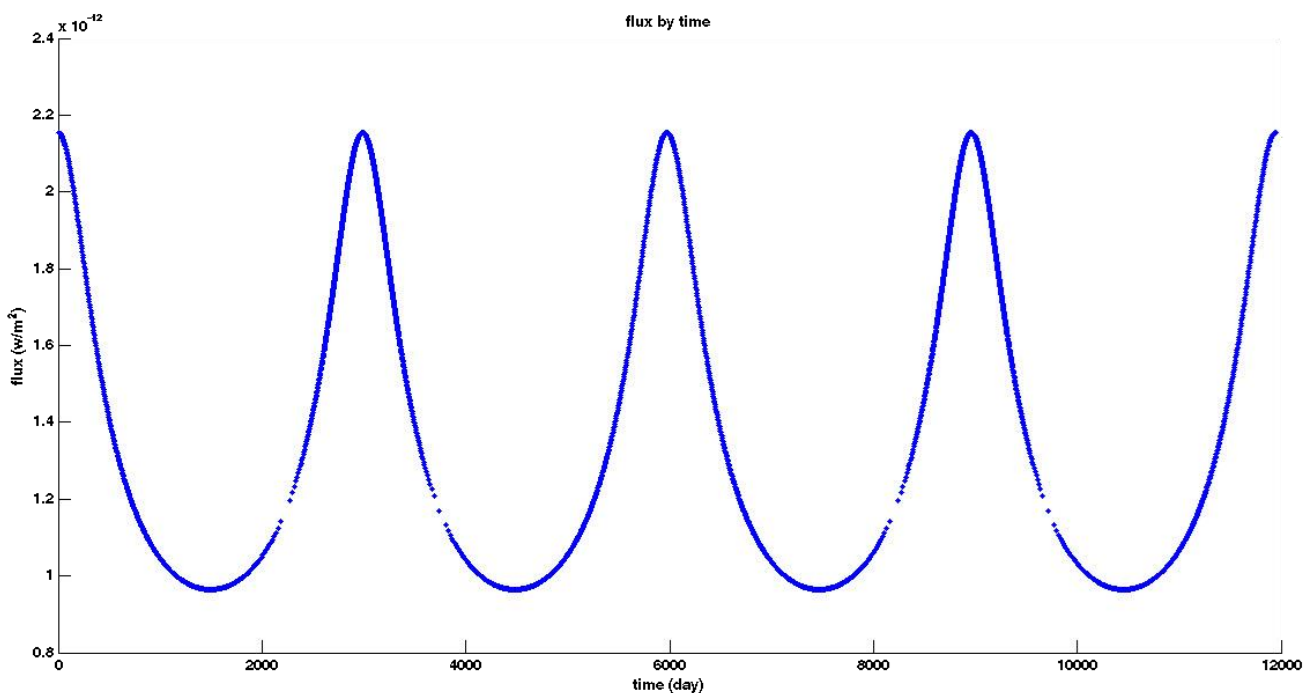
عدسی گرانشی در سیستم‌های دوتایی (۱۵۰ نمره) (طراح: شهاب‌الدین محین)

در این بخش نیازی به محاسبه‌ی خطا نیست.

از یک سیستم دوتایی که هر دو مؤلفه‌ی آن در رشته اصلی قرار دارند عکس‌برداری شده است. به دلیل وجود یک سیاه چاله (عدسی گرانشی)، مسیر حرکت این سیستم دوتایی روی صفحه‌ی آسمان مطابق شکل ۴ است. می‌دانیم که اگر ستاره هم‌راستا با عدسی نباشد، دو تصویر تشکیل می‌شود؛ بنابراین در شکل ۴ دو تصویر مشاهده می‌کنید. تعدادی از داده‌های شکل ۴ در جدول ۱ موجود هستند. r_+ و r_- فاصله‌ی زاویه‌ای تصویرها از نقطه‌ی P بر حسب رادیان هستند. نقطه P یک نقطه‌ی ثابت و دلخواه در آسمان است. θ هم زاویه در دستگاه قطبی منطبق بر نقطه P و نسبت به یک محور ثابت و دلخواه است. شکل ۵ نمودار شار دریافتی سیستم دوتایی نسبت به زمان است.



شکل ۴ - تصویر سیستم دوتایی (مقیاس تصویر صحیح نیست).



شکل ۵ - نمودار شار دریافتی بر حسب زمان

#	θ_{rad}	r_+	r_-
1	-0.78	7.52E-09	-5.44E-09
2	-0.64	8.33E-09	-4.91E-09
3	-0.50	8.73E-09	-4.68E-09
4	-0.22	9.21E-09	-4.44E-09
5	0.06	9.32E-09	-4.39E-09
6	0.34	9.05E-09	-4.52E-09
7	0.48	8.77E-09	-4.66E-09
8	0.62	8.38E-09	-4.88E-09
9	0.76	7.74E-09	-5.28E-09
10	-0.78	7.52E-09	-5.44E-09
11	-0.64	7.06E-09	-5.80E-09
12	-0.36	6.89E-09	-5.93E-09
13	0.20	6.86E-09	-5.96E-09
14	0.62	7.04E-09	-5.81E-09
15	0.76	7.33E-09	-5.58E-09

۶. رابطه‌ی مقابل را برای عدسی گرانشی ثابت کنید. $\theta^2 - \beta\theta - \theta_E^2 = 0$, $\theta_E^2 = \frac{4GM}{c^2} \frac{d_{LS}}{d_L d_S}$

۷. در کاغذ قطبی، دو تصویر تشکیل شده توسط عدسی را برای تمامی θ ها رسم کنید. مکان سیاه چاله را روی نمودار مشخص کنید.

۸. مسیر واقعی حرکت این سیستم دوتایی را در نمودار سؤال ۷ رسم کنید.

۹. میل مداری سیستم را به دست آورید (روش کار را توضیح دهید).

۱۰. خروج از مرکز سیستم دوتایی را به دست آورید.

۱۱. میانگین زمانی شار دریافتی کل سیستم چه قدر است؟

۱۲. θ_E را محاسبه کنید.

۱۳. در سوال ۸، مسیر حرکت این سیستم دوتایی را رسم کرده‌اید. نقاطی را که در این مسیر، کل شار دریافتی کمینه و بیشینه می‌شود، به ترتیب با \times و Δ نشان دهید.

۱۴. فاصله‌ی تقریبی این سیستم دوتایی از ناظر چه قدر است؟



روابط برازش خط راست

$$y = A + Bx$$

$$d_i = y_i - (A + Bx_i)$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

$$A = \bar{y} - B\bar{x}$$

$$(\Delta B)^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

$$(\Delta A)^2 = \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \right) \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

$$y = Bx$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

$$(\Delta B)^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 1}$$

جدول اطلاعات بخش تحول ستاره‌ای و محیط

#	بازه‌ی قدر ظاهری	قدر مطلق مرکزی	Φ	Ψ	ξ		
۱	[۱۴ ،]						
۲							
۳							
۴							
۵							
۶							
۷							
۸							
۹							
۱۰							
۱۱							
۱۲							
۱۳							
۱۴							
۱۵							
۱۶	[، ۲۲]						

می‌توانید اطلاعات دیگر را در خانه‌های خالی بنویسید.

به نام خدا

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان

مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»



یازدهمین دوره‌ی طلای المپیاد نجوم و اخترفیزیک

بخش تحلیل داده

آزمون تحلیل داده با اکسل

۲۷ مرداد ۱۳۹۵

مدت آزمون: ۲۴۰ دقیقه (۸:۰۰ تا ۱۲:۰۰)

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است به موارد زیر توجه فرمایید:

- (۱) این آزمون ۱۷ سؤال دارد و زمان آن ۲۴۰ دقیقه است.
- (۲) به همراه دفترچه‌ی سؤالات، دفترچه‌ی پاسخ‌نامه، چرک‌نویس و ۲ فایل در اختیار شما قرار گرفته است.
- (۳) در این آزمون می‌توانید از ماشین حساب خودتان که قابلیت برنامه‌ریزی ندارد، استفاده کنید.
- (۴) همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی به جز لپتاپ مجاز نیست.
- (۵) پس از انجام هر سؤال، فایل خود را در پوشه‌ی مربوط به آن ذخیره (Save As) کنید.
- (۶) فایل‌های نهایی خود را در یک پوشه به نام خودتان ذخیره کرده و در پایان، به همراه پاسخ‌نامه تحویل دهید.

©کلیه‌ی حقوق این سؤالات برای معاونت دانش‌پژوهان جوان محفوظ است.



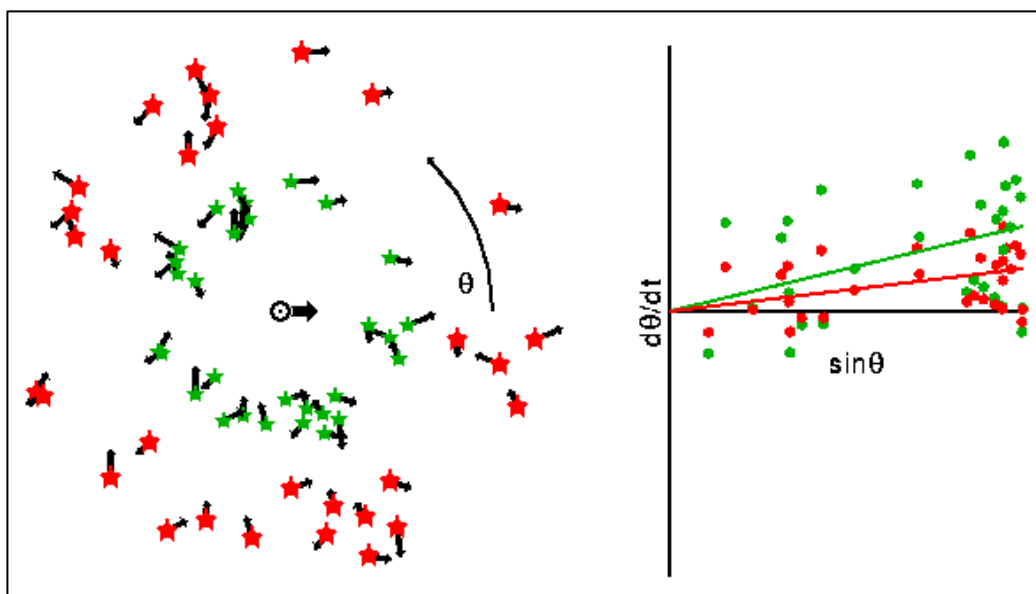
ثوابت فیزیکی و نجومی

مقدار	کمیت
$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$	ثابت جهانی گرانش G
$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	سرعت نور c
$3.09 \times 10^{16} \text{ m}$	پارسک pc
$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$	جرم خورشید M_{\odot}
$3.85 \times 10^{26} \text{ W}$	درخشندگی خورشید L_{\odot}
13.4 km s^{-1}	سرعت خورشید ^۱ v_{\odot}
$30^{\circ} 00' 00''$	میل اوج خورشیدی δ_A
$18^{\text{h}} 03^{\text{m}} 50^{\text{s}}$	بعد اوج خورشیدی α_A
$5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$	جرم زمین M_{\oplus}
6378 km	شعاع زمین R_{\oplus}
86164 s	شبانه‌روز نجومی

^۱ این سرعت نسبت به مرجع محلی لختی (LSR) اندازه‌گیری شده است.

فاصله‌سنجی گروهی ستارگان (۱۰۰ نمره) (طراح: محمد‌های ستوده)

همان طور که می‌دانید، یکی از روش‌های متداول برای فاصله‌سنجی ستارگان، استفاده از اختلاف منظر مثلثاتی^۱ است. با این حال، محدودیت‌های این روش برای سنجش فواصل کهکشانی دور در قرن بیستم، موجب شد روش‌های جدیدی با تکیه بر فرض‌های آماری برای محاسبه‌ی فاصله‌ی میانگین گروهی از ستارگان ابداع شود. یکی از این روش‌ها **اختلاف منظر عمومی**^۲ نام دارد. هرتسپرونگ در سال ۱۹۱۳ با مطالعه‌ی ستارگان نزدیک، از این روش برای محاسبه‌ی فاصله و کالیبره کردن رابطه‌ی دوره‌ی تناوب-درخشندگی قیفاووسی‌ها استفاده کرد.



شکل ۱ - با اندازه‌گیری حرکت خاصه در راستای دور/نزدیک شدن از نقطه‌ی اوج خورشیدی، می‌توان فاصله‌ی گروه را تعیین کرد. در روش اختلاف منظر عمومی از جابه‌جایی ستارگان به خاطر حرکت خورشید برای تعیین فاصله استفاده می‌شود. از آن‌جا که به کمک این روش فاصله‌ی میانگین به دست می‌آید، لازم است توجه زیادی در انتخاب نمونه‌ی مناسب ستارگان و داده‌کاهی انجام شود. در گذشته برای انجام این کار، ستارگان دارای رده‌ی طیفی و قدر ظاهری مشابه انتخاب می‌شدند. هم‌چنین، به دلیل دقت بالای تعیین سرعت خاصه، بهتر است از داده‌های کاتالوگ هیپارخوس استفاده شود.

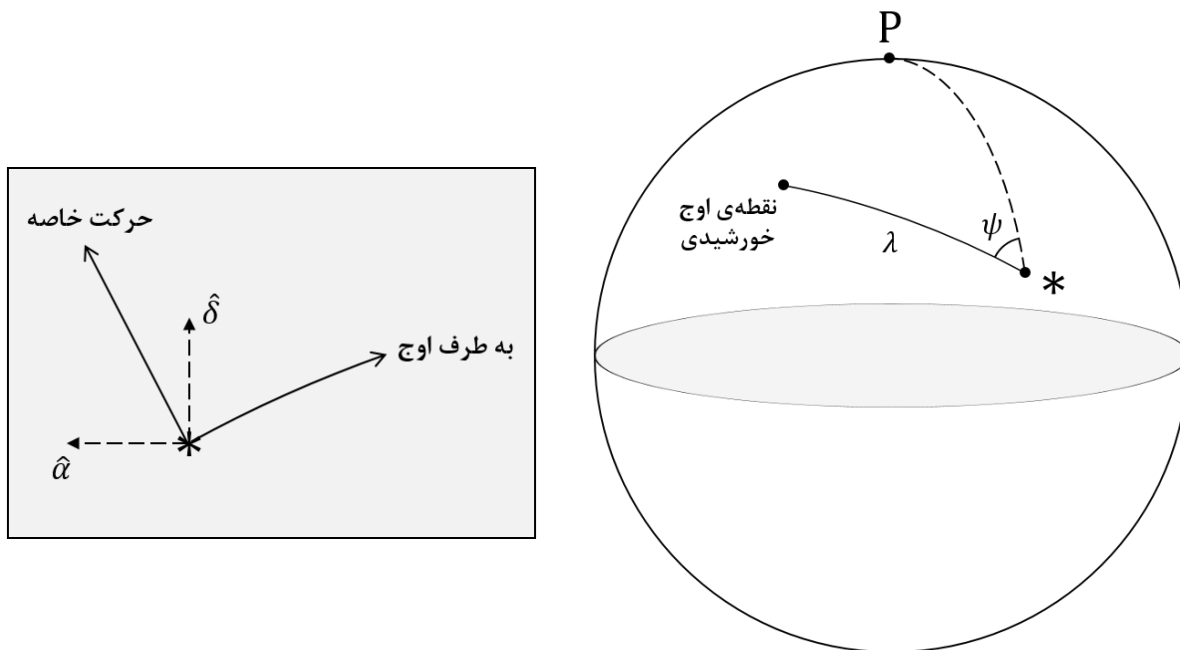
فایل «HIPSAMPLEData.xlsx»، داده‌های کاتالوگ هیپارخوس برای تعدادی از ستارگان را نشان می‌دهد. این داده‌ها شامل شماره‌ی HIP، صورت فلکی، رده‌ی طیفی، بعد (α) بر حسب ساعت، میل (δ) بر حسب درجه،

^۱ Trigonometric Parallax

^۲ Secular Parallax

حرکت خاصه در راستای بعد (μ_α) و حرکت خاصه در راستای میل (μ_δ) بر حسب میلی‌ثانیه‌ی قوسی بر سال، قرمزگرایی (Z) ، قدر ظاهری (m) و قدر مطلق (M) است.

در این مسئله، از حرکت زمین به دور خورشید صرف نظر می‌کنیم. یعنی، تمامی داده‌ها نسبت به مرکز خورشید سنجیده شده‌اند. نقطه‌ای که خورشید در آسمان به سمت آن حرکت می‌کند، نقطه‌ی اوج خورشیدی^۱ نامیده می‌شود. برای سادگی محاسبات، از دستگاه مختصاتی مطابق شکل ۲ استفاده می‌شود.



شکل ۲ - راست: دستگاه مختصات راهنما | چپ: حرکت خاصه‌ی ستاره در صفحه‌ی آسمان

۱. مقادیر ψ و λ را برای هر ستاره به دست آورید.

در ادامه حرکت خاصه‌ی ستاره در دو راستا تجزیه می‌شود: حرکت خاصه در جهت دور شدن از نقطه‌ی اوج خورشیدی را با v و حرکت خاصه در راستای عمود بر v را با τ نمایش می‌دهند.

۲. روابط زیر را برای تبدیل μ_α و μ_δ به v و τ اثبات کنید و این مقادیر را بر حسب میلی‌ثانیه‌ی قوسی بر سال برای ستارگان به دست آورید.

$$v = \mu_\alpha \cos \delta \sin \psi - \mu_\delta \cos \psi \quad , \quad \tau = \mu_\alpha \cos \delta \cos \psi + \mu_\delta \sin \psi$$

در صورتی که نمونه به خوبی انتخاب شده باشد، به گونه‌ای که ستارگان به صورت تصادفی نسبت به مرجع محلی^۲ لختی^۲ حرکت کنند، میانگین سرعت خالص ستارگان در هر کدام از راستاها برابر با صفر است.

^۱ Solar Apex

^۲ Local Standard of Rest (LSR)

۳. حرکت خورشید روی کدام مؤلفه‌ی حرکت خاصه تأثیر می‌گذارد؟

۴. با تصحیح اثر حرکت خورشید، رابطه‌ی حرکت خاصه‌ی خالص و حرکت خاصه‌ی مشاهده شده را بیابید. با انجام برخی تغییرات و میانگین‌گیری روی این رابطه، فاصله‌ی میانگین به دست می‌آید.

۵. با استفاده از قسمت‌های قبل، ثابت کنید فاصله‌ی میانگین این مجموعه بر حسب پارسک از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\langle d \rangle = \frac{v_{\odot} \langle \sin^2 \lambda \rangle}{4.74 \langle v \sin \lambda \rangle}$$

در این رابطه سرعت خورشید بر حسب کیلومتر بر ثانیه و v بر حسب ثانیه‌ی قوسی بر سال جایگذاری می‌شود. مقدار این فاصله را گزارش کنید.

یکی از روش‌های دیگر برای تخمین فاصله که در آن طیف‌سنجی هم نقش دارد، اختلاف منظر آماری^۱ است. در این روش، برای نمونه‌های بزرگ آماری، فرض می‌شود میانگین قدر مطلق سرعت در هر راستا، مستقل از خود راستا است. در نتیجه میانگین قدر مطلق هر مؤلفه‌ی سرعت خاصه، برابر با میانگین قدر مطلق سرعت شعاعی است.

۶. ثابت کنید فاصله‌ی میانگین این مجموعه بر حسب پارسک با استفاده از روش اختلاف منظر آماری از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\langle d \rangle = \frac{\langle |v_r + v_{\odot} \cos \lambda| \rangle}{4.74 \langle |\tau| \rangle}$$

در این رابطه سرعت‌ها بر حسب کیلومتر بر ثانیه و τ بر حسب ثانیه‌ی قوسی بر سال جایگذاری می‌شود. مقدار این فاصله را نیز گزارش کنید.

۷. میانگین و انحراف معیار نمونه‌ی اختلاف منظر مثلثاتی ستارگان را گزارش کنید. انحراف نسبی اختلاف منظر عمومی و آماری از میانگین را نیز به دست آورید.

۸. به نظر شما کدام یک از این دو روش برای تعیین فاصله مناسب‌تر است؟ چرا؟

شایان ذکر است محاسبه‌ی فاصله‌ی خوشه‌های ستاره‌ای یا سیستم‌های دوردست در کهشکان، نیازمند انجام تغییراتی در این روش است. هم‌چنین با فرض‌های آماری دقیق‌تر، می‌توان به مقادیر قابل قبول‌تری دست یافت.

ماهواره‌های GPS (۱۴۰ نمره) (طراح: شهاب‌الدین محین)

در این بخش نیازی به محاسبه خطا نیست.

در این سوال، ماهواره‌ی شماره‌ی ۱۲ از مجموعه‌ی ماهواره‌های GPS را بررسی می‌کنیم. سیستم مکان‌یابی به کمک GPS از ۳ بخش اصلی تشکیل شده است:

بخش اول، ماهواره‌ها: مجموعه‌ای شامل ۲۴ ماهواره (با چند ماهواره‌ی اضافه)

بخش دوم، دریافت‌کننده‌ها: هواپیماها، کشتی‌ها، تانک‌ها، ماشین‌ها و حتی افراد معمولی دارای گوشی هوشمند

بخش سوم، ایستگاه‌های زمینی: کنترل ماهواره‌ها را به عهده دارند؛ به این ترتیب که مختصات ایستگاه‌های زمینی با دقت بسیار بالایی اندازه‌گیری شده‌اند و اگر احیاناً مختصات ماهواره در سیستمش دچار مشکل شود، به کمک آن‌ها تصحیح خواهد شد.

توجه کنید که ماهواره‌ها صرفاً به کمک فاصله‌سنجی مکان‌یابی می‌کنند و امکان تشخیص جهت را ندارند.

پارامترهای مداری ماهواره‌ی شماره ۱۲ به صورت زیر است

$$\begin{aligned}a &= 2.65574 \times 10^7 \text{ m} \\e &= 0.01548 \\\Omega &= 1.12671 \text{ rad} \\\omega &= -0.0993646 \text{ rad} \\i &= 1.08539 \text{ rad}\end{aligned}$$

۹. در یک لحظه‌ی خاص، برای تعیین مختصات یک کشتی در آب‌های آزاد حداقل به چند ماهواره نیاز است؟

۱۰. در یک لحظه‌ی خاص، برای تعیین مختصات یک جسم فضایی حداقل به چند ماهواره نیاز است؟

۱۱. با فرض این که ماهواره در زمان $t = 0$ در حضيض مداری خود بوده است، t را به ازای آنومالی‌های حقیقی (θ) ذکر شده در فایل «GPS_Input.txt» به دست آورید. واحد θ درجه است.

۱۲. فاصله‌ی ماهواره از مرکز کره‌ی زمین (r) را به دست آورید.

دستگاه مختصات uvw راست‌گرد را طوری قرار می‌دهیم که مبدأ آن منطبق بر مرکز کره‌ی زمین، محور w عمود بر صفحه‌ی مداری (در راستای بردار تکانه‌ی زاویه‌ای ماهواره) و محور u به سمت حضيض مداری باشد.

۱۳. مختصات ماهواره را در دستگاه مختصات uvw برای θ های ذکر شده به دست آورید.

۱۴. نمودار قطبی ماهواره در دستگاه مختصات uvw را رسم کنید.



حال دستگاه مختصات زمین مرکز ثابت XYZ راست گرد را طوری قرار می‌دهیم که مبدأ آن منطبق بر مرکز کره‌ی زمین، محور Z به سمت ستاره‌ی قطبی و محور X به سمت اعتدال بهاری (γ) باشد.

۱۵. مختصات ماهواره را در دستگاه مختصات XYZ برای θ های ذکر شده به دست آورید.

این ماهواره در هر لحظه به ۱۰ ایستگاه زمینی زیر سیگنالی می‌فرستد و مدت زمان بین ارسال و دریافت سیگنال را اندازه می‌گیرد. مختصات ایستگاه‌های زمینی در جدول زیر آورده شده است.

#	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
φ (deg)	10	-20	-20	10	0	0	-20	-10	20	20
l (deg)	0	40	60	140	160	170	180	220	270	320

۱۶. برای هر یک از θ ها، به ازای هر ایستگاه، مدت زمان بین ارسال و دریافت سیگنال را به دست آورید. توجه کنید اگر ماهواره زیر افق ایستگاه زمینی باشد، جذب باعث می‌شود مدت زمان بین ارسال و دریافت سیگنال، بی‌نهایت شود. در مجموع باید ۱۰۰ عدد گزارش کنید. فرض کنید در لحظه‌ی $t = 0$ ، محور X به سمت نقطه‌ی $(\varphi, l) = (0, 0)$ است.

قبل از حل این سوال مطمئن شوید که پاسخ سوال‌های قبل را در جای دیگری **Save As** کرده باشید.

۱۷. آیا می‌توان به کمک مدت زمان‌هایی که در سؤال قبل به دست آوردید، در تمامی t های سوال ۱۱ مختصات ماهواره‌ی شماره ۱۲ GPS را یکتا تعیین کرد؟ اگر جواب خیر است، مختصات ایستگاه‌های زمینی را چه‌طور تغییر دهیم تا مختصات ماهواره را در تمام t های ذکر شده داشته باشیم؟

آزمون‌های تحلیل داده‌ی

دوره‌ی تابستانی ۱۳۹۵

آزمون تحلیل داده ۲
تاریخ: ۱۵ شهریور ۱۳۹۵
مدت زمان: ۲۱۰ دقیقه

به نام خدا

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی(ره)»



دوازدهمین دوره‌ی تابستانه‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

بخش تحلیل داده

آزمون تحلیل داده ۲

۱۵ شهریور ۱۳۹۵

مدت آزمون: ۲۱۰ دقیقه (۹:۳۰ تا ۱۳:۰۰)

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است به موارد زیر توجه فرمایید:

- (۱) این آزمون ۱۲ سؤال دارد و زمان آن ۲۱۰ دقیقه است.
- (۲) به همراه دفترچه‌ی سؤالات، دفترچه‌ی پاسخ‌نامه، ۲ کاغذ رسم نمودار، نقاله، خط‌کش و چرک‌نویس در اختیار شما قرار گرفته است.
- (۳) در این آزمون فقط می‌توانید از ماشین حساب **CASIO $fx - 82MS$** استفاده کنید.
- (۴) همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی مجاز نیست.

Ⓒ کلیه حقوق این سؤالات برای معاونت دانش‌پژوهان جوان محفوظ است.



ثوابت فیزیکی و نجومی

توجه! ثوابت درون جدول خطا ندارند.

مقدار	کمیت
$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$	ثابت جهانی گرانش G
$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	سرعت نور c
$3.09 \times 10^{16} \text{ m}$	پارسک pc
$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$	جرم خورشید M_{\odot}
$3.85 \times 10^{26} \text{ W}$	درخشندگی خورشید L_{\odot}
1370 W m^{-2}	ثابت خورشیدی F_{\odot}
-26.83	قدر ظاهری بولومتریک خورشید
365.25 day	سال اعتدالی

تبدیل تاریخ

تاریخ میلادی: 20 March 2016

↔

تاریخ شمسی: ۱ فروردین ۱۳۹۵

اذان ظهر (۱۳۵ نمره) (طراح: شهاب الدین محین)

در کشور پاراگوئه (GMT -4:00) در شهر آسونسیون^۱، زمان اذان ظهر (عبور خورشید از نصف النهار ناظر) بر حسب روزهای سال مطابق جدول ۱ است. این زمان بر اساس زمان رسمی کشور پاراگوئه می‌باشد. شکل ۱ مکان پاراگوئه را روی کره زمین نشان می‌دهد.



شکل ۱

در بسیاری از کشورهای جهان، ساعت تابستانی وجود دارد که باعث صرفه‌جویی در مصرف برق می‌شود. به عنوان مثال، در ایران در روز اول فروردین و ۳۰ شهریور زمان را یک ساعت تغییر می‌دهیم. در اکثر کشورهای جهان در m آمین یک‌شنبه‌ی Mar و n آمین یک‌شنبه‌ی Nov/Oct زمان را یک ساعت تغییر می‌دهند که m و n به کشور مورد نظر بستگی دارد. مثلاً در ایالات متحده در دومین یک‌شنبه‌ی Mar و اولین یک‌شنبه‌ی Nov در ساعت 2:00 AM، زمان را یک ساعت تغییر می‌دهند.



جدول ۱ - اذان ظهر به افق آسونسیون

#	تاریخ	اذان ظهر
1	Saturday, January 02, 2016	12:54:26
2	Saturday, January 23, 2016	13:02:19
3	Wednesday, February 10, 2016	13:04:45
4	Sunday, February 21, 2016	13:04:09
5	Sunday, March 06, 2016	13:01:35
6	Monday, March 28, 2016	11:55:19
7	Tuesday, April 12, 2016	11:51:04
8	Wednesday, April 27, 2016	11:47:58
9	Thursday, May 12, 2016	11:46:48
10	Friday, May 27, 2016	11:47:42
11	Monday, June 13, 2016	11:50:44
12	Sunday, June 26, 2016	11:53:34
13	Saturday, July 09, 2016	11:55:58
14	Sunday, July 31, 2016	11:57:03
15	Monday, August 08, 2016	11:56:16
16	Friday, August 19, 2016	11:54:11
17	Thursday, September 01, 2016	11:50:30
18	Friday, September 16, 2016	11:45:19
19	Sunday, October 02, 2016	12:39:49
20	Monday, October 17, 2016	12:35:52
21	Thursday, November 03, 2016	12:34:11
22	Sunday, November 20, 2016	12:36:21
23	Thursday, December 01, 2016	12:39:50
24	Saturday, December 17, 2016	12:46:58



۱. آیا در پاراگوه ساعت تابستانی وجود دارد؟ چرا؟

۲. با فرض دایره‌ای بودن مدار زمین به دور خورشید، رابطه‌ی تقریبی زیر را نشان دهید.

$$E = \frac{\epsilon^2}{4} \sin 2\lambda$$

۳. میانگین تعدیل زمان (\bar{E}) در یک دوره تناوب چقدر است؟

۴. به کمک سوال ۳ و جدول ۱، طول جغرافیایی آسونسیون (Asuncion) را محاسبه کنید. (توجه کنید که مقدار ϵ را نمی‌دانیم و در سوال ۶ محاسبه می‌کنیم)

۵. تعدیل زمان را برای داده‌های جدول ۱ محاسبه کنید.

۶. به کمک برازش منحنی، ϵ را به همراه خطا محاسبه کنید. (راهنمایی: از خطای E و λ می‌توانید صرف نظر کنید.)

۷. میل خورشید را برای جدول فوق محاسبه کنید.

۸. نمودار میل بر حسب تعدیل زمان را رسم کنید.



آهنگ تشکیل ستاره (۷۵ نمره) (طراح: شهاب الدین محین)

در این بخش نیازی به محاسبه‌ی خطا نیست.

در پروژه‌ی MOSA آهنگ تشکیل ستاره^۱ (SFR) را برای چندین ابر مولکولی غول^۲ (GMC) شبیه‌سازی کرده‌اند. آهنگ تشکیل ستاره، برابر با میزان جرم منقبض شده در واحد زمان در واحد حجم است که تبدیل به ستاره می‌شود. تعداد ستاره‌های تولیدشده در واحد زمان را نرخ ستاره‌زایی (\dot{N}) می‌نامیم. دانشمندان به این نتیجه رسیده‌اند که با تغییر نرخ ستاره‌زایی، آهنگ تشکیل ستاره تغییر می‌کند (شکل ۲). فرض کنید که جرم تمامی ابرهای مولکولی غول $10^8 M_{\odot}$ بوده؛ قطرشان 5 pc است و فقط ۲٪ از جرم آن‌ها به ستاره تبدیل می‌شود. هم‌چنین SFR و شعاع ابر در مدت زمان ستاره‌زایی ثابت می‌ماند.

۹. آهنگ تشکیل ستاره (SFR) برای ابر B96 چه قدر باشد تا تعداد ستاره‌های تولیدشده کمینه شود.

۱۰. مدت زمان ستاره‌زایی ابر B96 چه قدر است؟

به دلیل ستاره‌زایی، قدر ظاهری خوشه‌ی کروی ثابت نمی‌ماند. در بازه‌ی زمانی مشخصی ناظران زمینی قدر ظاهری بولومتریک خوشه‌ی کروی را در ابر B96 محاسبه کرده‌اند که در جدول ۲ موجود است. توجه کنید که مبدأ زمانی جدول ۲ لزوماً شروع ستاره‌زایی نیست.

۱۱. نمودار شار خوشه‌ی کروی از دید ناظر زمینی بر حسب زمان را در کاغذ مناسب رسم کنید.

فرض کنید که جرم تمام ستاره‌های تولیدشده با هم برابر باشد و رابطه‌ی جرم-درخشندگی $L \propto M^3$ است.

۱۲. فاصله‌ی خوشه‌ی کروی از زمین را محاسبه کنید.

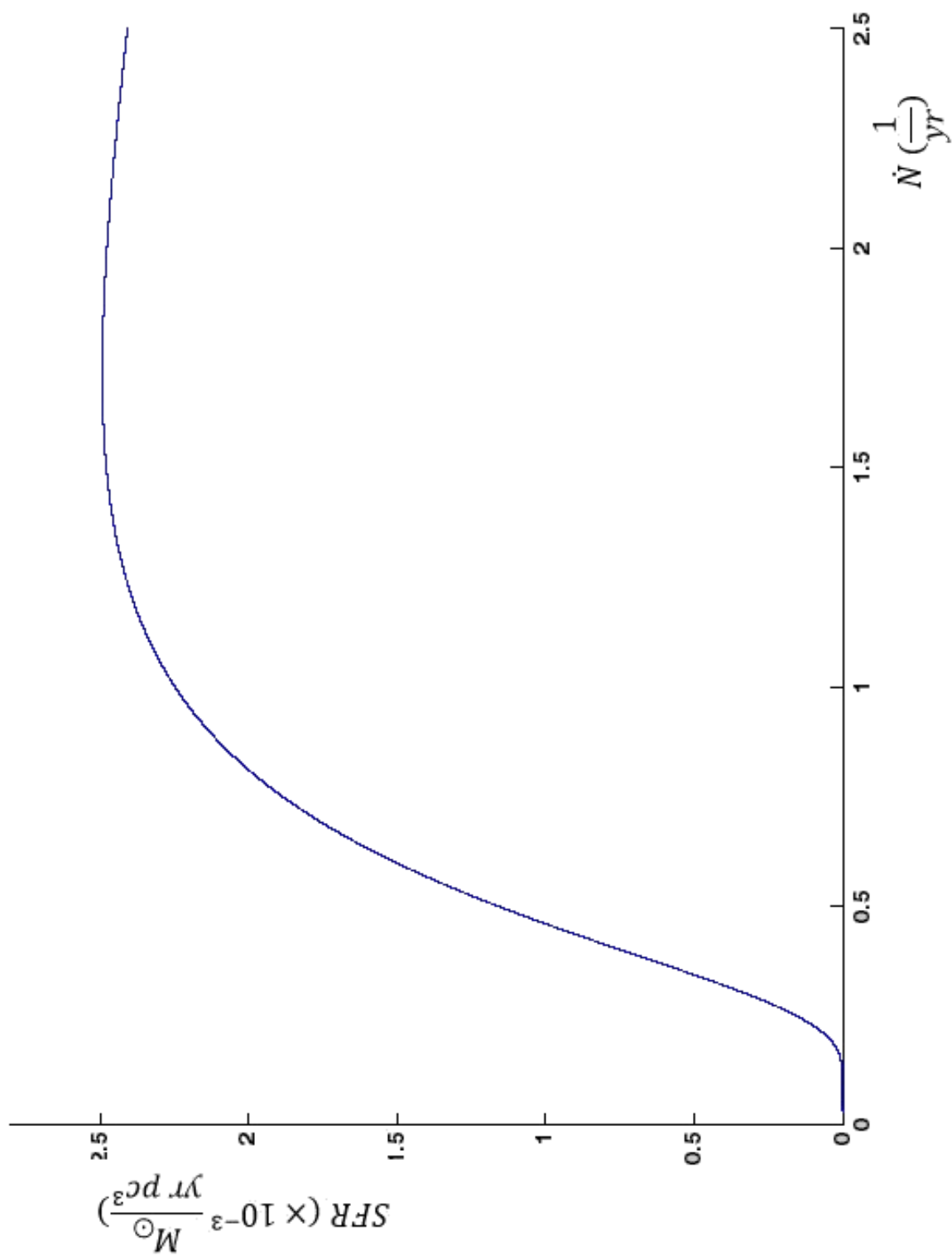
^۱ Star Formation Rate

^۲ Giant Molecular Cloud



جدول ۲ - قدر ظاهری بولومتریک خوشه‌ی کروی بر حسب زمان

#	t (Myr)	m
1	0	6.20
2	0.1	5.97
3	0.2	5.78
4	0.3	5.62
5	0.4	5.49
6	0.5	5.36
7	0.6	5.25
8	0.7	5.15
9	0.8	5.06
10	0.9	4.97



شکل ۲ - نمودار SFR بر حسب \dot{N}



روابط برازش خط راست

$$y = A + Bx$$

$$d_i = y_i - (A + Bx_i)$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

$$A = \bar{y} - B\bar{x}$$

$$(\Delta B)^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

$$(\Delta A)^2 = \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \right) \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

$$y = Bx$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

$$(\Delta B)^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 1}$$



تعداد روز ماه‌های میلادی

نام مختصر	ماه میلادی	تعداد روزها
Jan	January	31
Feb	February	28/29
Mar	March	31
Apr	April	30
May	May	31
Jun	June	30
Jul	July	31
Aug	August	31
Sep	September	30
Oct	October	31
Nov	November	30
Dec	December	31

آزمون‌های تحلیل داده‌ی

دوره‌ی طلای ۹۶-۱۳۹۵

آزمون مفاهیم پایه‌ی تحلیل داده ۱

تاریخ: ۱۱ اسفند ۱۳۹۵

مدت زمان: ۱۲۰ دقیقه

آزمون میان دوره‌ی تحلیل داده

تاریخ: ۲۳ فروردین ۱۳۹۶

مدت زمان: ۳۳۰ دقیقه

آزمون مفاهیم پایه‌ی تحلیل داده ۲

تاریخ: ۱۹ تیر ۱۳۹۶

مدت زمان: ۳۱۵ دقیقه

آزمون تحلیل داده با اکسل

تاریخ: ۱۷ مرداد ۱۳۹۶

مدت زمان: ۲۱۰ دقیقه

به نام خدا

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»



دوازدهمین دوره‌ی طلای المپیاد نجوم و اخترفیزیک

بخش تحلیل داده

آزمون مفاهیم پایه‌ی تحلیل داده ۱

۱۱ اسفند ۱۳۹۵

مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه (۱۴:۰۰ تا ۱۶:۰۰)

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است به موارد زیر توجه فرمایید:

- (۱) این آزمون ۱۴ سؤال دارد و زمان آن ۱۲۰ دقیقه است.
- (۲) به همراه دفترچه‌ی سؤالات، دفترچه‌ی پاسخ‌نامه، ۲ کاغذ رسم نمودار و چرک‌نویس در اختیار شما قرار گرفته است.
- (۳) در این آزمون می‌توانید از ماشین حساب خودتان که قابلیت برنامه‌ریزی ندارد، استفاده کنید.
- (۴) همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی مجاز نیست.

©کلیه‌ی حقوق این سؤالات برای معاونت دانش‌پژوهان جوان محفوظ است.



ثوابت فیزیکی و نجومی

توجه! ثوابت درون جدول خطا ندارند.

مقدار	کمیت
6.67×10^{-11} $\text{m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1}$	ثابت جهانی گرانش G
6.63×10^{-34} J s	ثابت پلانک h
1.38×10^{-23} J K^{-1}	ثابت بولتزمن k
3.00×10^8 m s^{-1}	سرعت نور c
5.67×10^{-8} $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$	ثابت استفان-بولتزمن σ
1.67×10^{-27} kg	جرم پروتون m_p
3.09×10^{16} m	پارسک pc
9.46×10^{15} m	سال نوری ly
1.99×10^{30} kg	جرم خورشید M_\odot
3.85×10^{26} W	درخشندگی خورشید L_\odot
6380 km	شعاع زمین R_\oplus

جدول بارم‌بندی سؤالات

سؤال	بارم	سؤال	بارم
۱	۶	۸	۱۰
۲	۳	۹	۱۲
۳	۲	۱۰	۴
۴	۳	۱۱	۶
۵	۶	۱۲	۱۴
۶	۵	۱۳	۸
۷	۴	۱۴	۱۰

تشریحی

کوتاه پاسخ



سؤالات کوتاه پاسخ

توجه! در این سؤالات، نمره‌ای به راه حل تعلق نمی‌گیرد.

سؤال ۱ | طراح: شهاب‌الدین محین: داده‌های جدول ۱ را به صورت درست گزارش کنید.

جدول ۱

#	گزارش اولیه
1	3.1495 ± 0.004
2	95555 ± 7530
3	$863.531 \times 10^{-7} \pm 96 \times 10^{-9}$
4	$13.74545 \text{ Gyr} \pm 1.4 \text{ Myr}$
5	8473.86453 ± 23.7646
6	$0.00002466 \pm 0.000001757 M_{\odot}$

سؤال ۲ | طراح: شهاب‌الدین محین:

الف) ۹ پارسک چند سال نوری است؟

ب) دو شهر تهران $(l, \phi) = (51^{\circ} 30' E, 35^{\circ} 42' N)$ و دوحه $(l, \phi) = (51^{\circ} 30' E, 25^{\circ} 17' N)$ طول جغرافیایی تقریباً برابر دارند. فاصله‌ی دو شهر چند کیلومتر است؟ (شعاع زمین $R_e = 6378 \text{ km}$)

سؤال ۳ | طراح: پارسا عالیان:

می‌خواهیم استخری را با یک شلنگ پر کنیم. استخر به شکل مکعب با ضلع m $(\frac{5}{0} \pm \frac{0}{3})$ است. همچنین شلنگ دارای شعاع cm $(\frac{3}{0} \pm \frac{0}{5})$ است و سرعت خروج آب از آن برابر m/s $(\frac{5}{0} \pm \frac{0}{4})$ است. اگر چگالی آب kg/m^3 (1000 ± 30) باشد، مدت زمان پر شدن استخر را به همراه خطا به دست آورید.

سؤال ۴ | طراح: محمد‌هادی ستوده:

تداخل‌سنج لیزری رصدخانه‌ی LIGO قادر به تعیین طول مسیر نور در بازوهای آن (۱۱۲۰ کیلومتر) با دقت یک ده‌هزارم شعاع پروتون (!) است.



شکل ۱ - بازوی تداخل‌سنجی رصدخانه‌ی LIGO (این شکل کمکی به حل سؤال نمی‌کند)

در صورتی که از روشی با خطای نسبی مشابه برای سنجش فاصله‌ی خورشید تا ستاره‌ی شعرای یمانی استفاده شده باشد و نتیجه‌ی زیر به دست آمده باشد:

$$۲/۶۴۲۴۳۲۵۴۴۱۸۹۰۶۵۸۰۲۴۳۲۴۲۱۳۲۱۴۲۱ \text{ pc}$$

فاصله را به صورت درست به همراه خطا گزارش کنید.

سؤال ۵ | طراح: شهاب‌الدین محین: رابطه‌ی جذب در جو زمین به صورت $m = m_0 + kX$ است. مقادیر m و X ستاره‌ای مطابق جدول ۲ هستند. m_0 و K را به همراه خطا گزارش کنید.

جدول ۲ - قدر ظاهری و جرم هوا

#	X	m
1	1.000	1.539
2	1.004	1.543
3	1.015	1.553
4	1.035	1.567
5	1.064	1.580
6	1.103	1.613
7	1.155	1.648



سؤال ۶ اطراح: پارسا عالیان:

یک تابع توزیع به صورت زیر تعریف کرده‌ایم

$$p(x) = c \frac{\lambda^x}{x!}$$

که احتمال به دست آمدن عدد طبیعی x در یک پدیده تصادفی را مشخص می‌کند. $p(x > 2)$ ، یعنی احتمال به دست آمدن عدد بزرگ‌تر از ۲ در این پدیده تصادفی بر حسب λ چه قدر است؟

سؤال ۷ اطراح: شهاب‌الدین محین:

در یک شب رصدی در IPM، دانش‌پژوهان با استفاده از CCD تصاویر مختلفی از ستاره‌ها تهیه کرده‌اند. برای تشخیص تکی یا دوتایی بودن ستاره‌ها، برنامه‌ای در نرم‌افزار متلب نوشته شده که تصویر ستاره را به عنوان ورودی دریافت می‌کند. اگر ستاره تکی باشد عدد «۱» و اگر ستاره دوتایی باشد عدد «۲» در خروجی چاپ می‌شود.

با توجه به روش تشخیص، توان تفکیک برنامه و نویز، دقت این الگوریتم ۸۰٪ است. یعنی اگر تصویر ستاره‌ای دوتایی را به برنامه بدهیم، با احتمال ۸۰٪ خروجی «۲» و اگر تصویر ستاره‌ای تکی را بدهیم، با احتمال ۸۰٪ خروجی «۱» چاپ خواهد شد.

با توجه به این که ۶۵٪ ستاره‌های آسمان دوتایی هستند، اگر به صورت تصادفی تصویری به این برنامه بدهیم و خروجی برنامه «۲» باشد، احتمال دوتایی بودن ستاره‌ی درون این تصویر چه قدر است؟

سوالات تشریحی

سؤال ۸ اطراح: شهاب‌الدین محین:

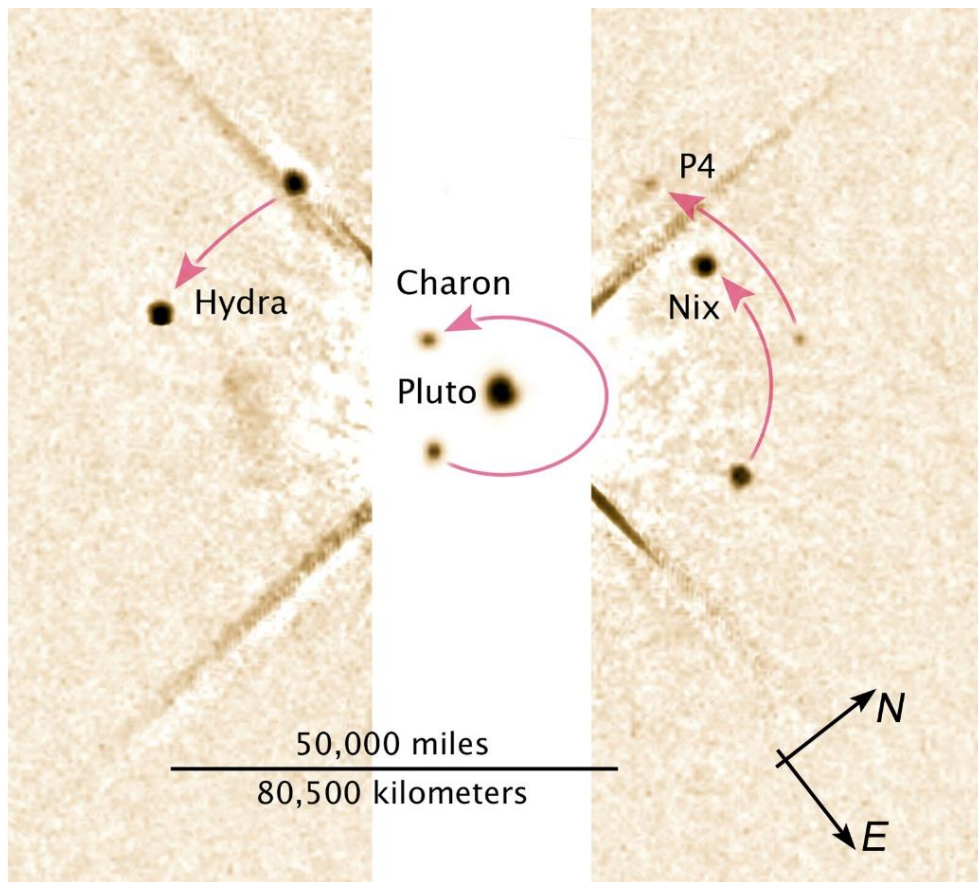
در یک لحظه سمت و ارتفاع ستاره‌های شش ضلعی زمستانی مطابق جدول ۳ است.

جدول ۳

نام	ارتفاع (a)	سمت (A)
Sirius	$35^\circ 45.622'$	$162^\circ 35.960'$
Rigel	$45^\circ 29.475'$	$191^\circ 16.280'$
Aldebaran	$65^\circ 16.696'$	$223^\circ 47.290'$
Capella	$78^\circ 17.917'$	$334^\circ 10.178'$
Pollux	$63^\circ 39.572'$	$98^\circ 33.195'$
Procyon	$49^\circ 55.313'$	$132^\circ 55.558'$

شش ضلعی زمستانی را در کاغذ قطبی به مرکز سرسو رسم کنید.

سؤال ۹ [طراح: محمد‌هادی ستوده]: شکل ۲ سیاره‌ی پلوتو به همراه ۴ قمر معروف آن را نشان می‌دهد.



شکل ۲ - تصویر تلسکوپ فضایی هابل از پلوتو و قمرهای آن

بازه‌ی زمانی جابه‌جایی قمرها دقیقاً $2/5$ روز است. با فرض این که مدار Hydra دایره‌ای است و میل مداری ندارد، شعاع مداری، دوره‌ی تناوب گردش و جرم این قمر را به دست آورید. جرم پلوتو 10^{22} kg ($1/309 \pm 0/011$) است. روش خود را به طور کامل توضیح دهید.

سؤال ۱۰ [طراح: شهاب‌الدین محین]: برای متغیر تصادفی X و تابع $g(X)$ رابطه‌ی زیر را اثبات کنید.

$$\eta_X = E(X) \text{ راهنمایی:}$$

$$E(g(X)) \approx g(\eta_X) + \frac{g''(\eta_X)}{2} \sigma_X^2$$

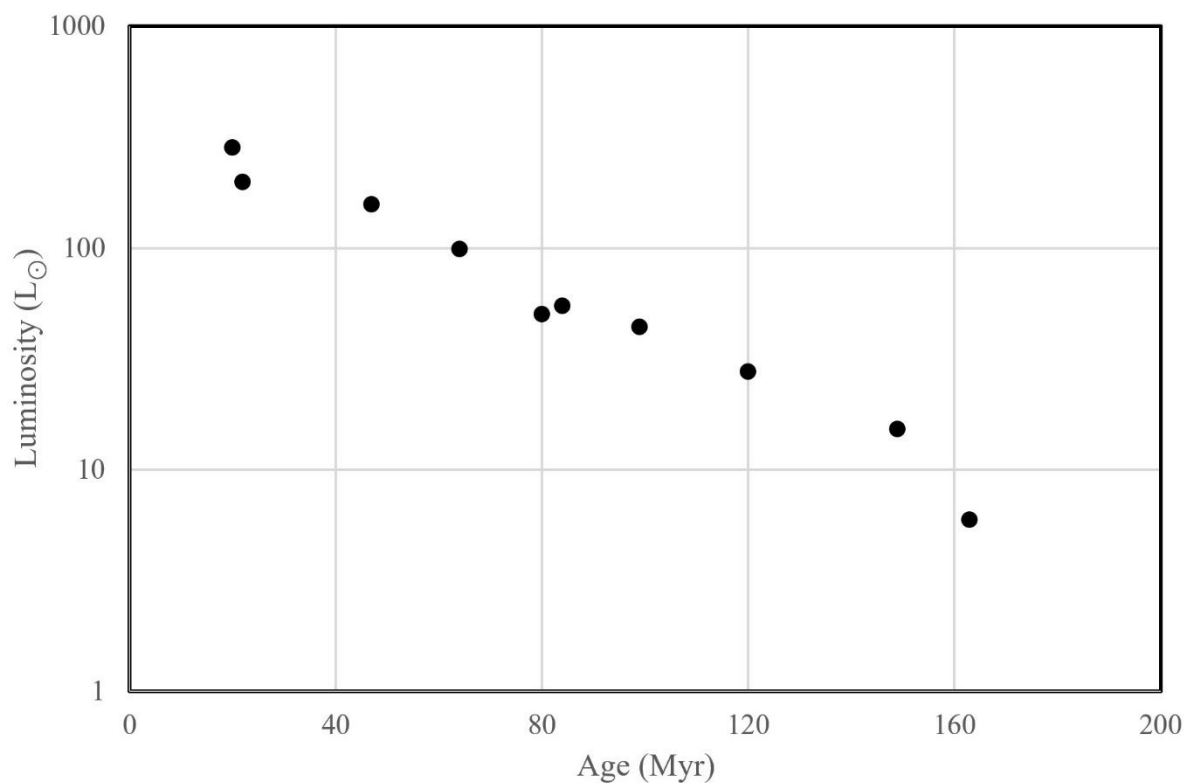
سؤال ۱۱ [طراح: شهاب‌الدین محین]: اثبات کنید در تابع توزیع دوجمله‌ای $mod = \lfloor (n+1)p \rfloor$ است.

عملگر $\lfloor x \rfloor$ ، مقدار x را رو به پایین گرد می‌کند. مثال: $\lfloor 2/8 \rfloor = 2$

سؤال ۱۲ | طراح: محمد‌هادی ستوده:

شکل ۳، درخشندگی کوتوله‌های سفید دارای شعاع $R = (1/2 \pm 0/3)R_{\oplus}$ بر حسب ستّشان را نشان می‌دهد.

نمودار درخشندگی بر حسب سنّ کوتوله‌های سفید



شکل ۳

فرض کنید تبادل دمای کوتوله‌ی سفید و محیط میان‌ستاره‌ای از قانون سرمایش نیوتون پیروی کند. یعنی تابعیت دمای مؤثر با زمان به صورت زیر باشد.

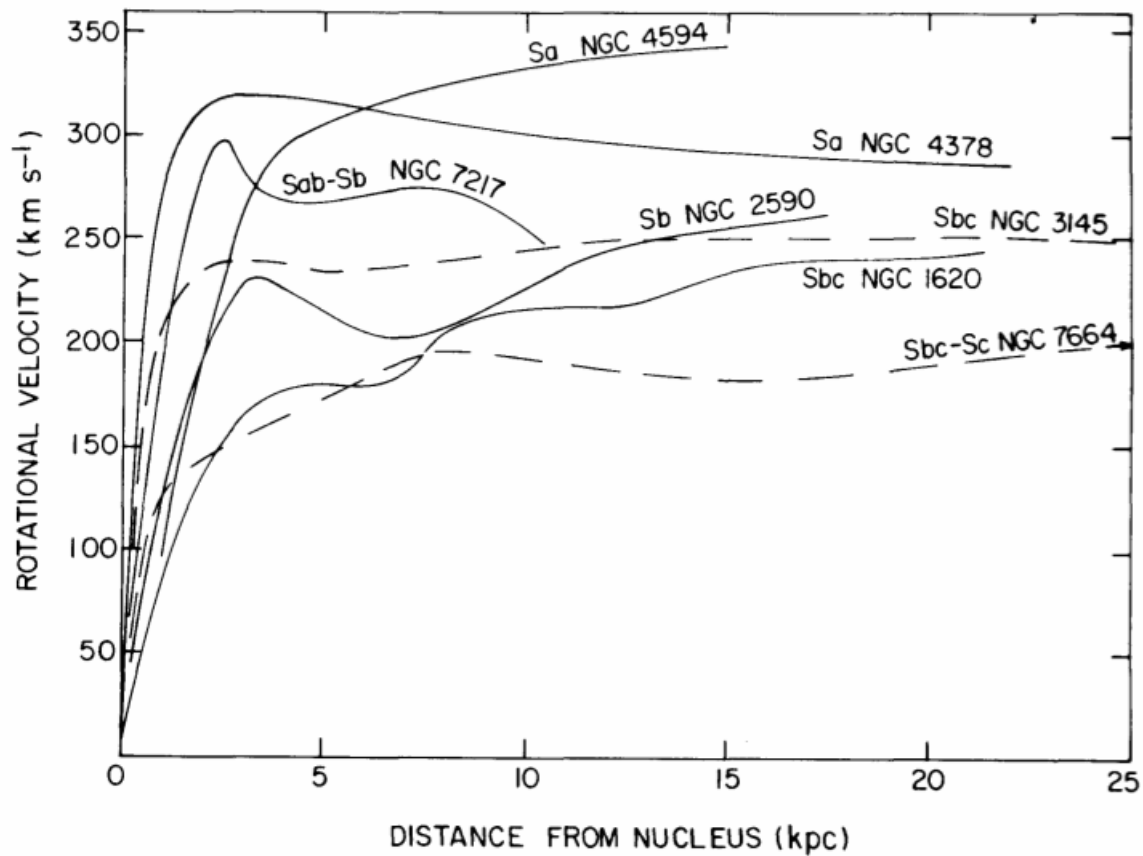
$$T(t) = T_{ISM} + (T_0 - T_{ISM})e^{-rt}$$

دمای محیط میان‌ستاره‌ای $T_{ISM} = (50 \pm 4) \text{ K}$ است.

دمای اولیه‌ی کوتوله‌ی سفید (T_0) و مقیاس زمانی سرد شدن را به همراه خطا به دست آورید.

سؤال ۱۳ | طراح: پارسا عالیان:

همان طور که می‌دانید، در منحنی چرخش کهکشان‌ها، در نهایت با دور شدن از مرکز، سرعت به یک مقدار ثابت میل می‌کند. با توجه به شکل ۴، این مقدار ثابت را برای کهکشان NGC 3145 به همراه خطا گزارش کنید.



شکل ۴ - منحنی چرخش تعدادی از کهکشان‌ها



سؤال ۱۴ | طراح: محمدهادی ستوده: جدول ۴، طول موج مرکزی (λ_c) فیلترهای دستگاه جانسون را نشان می‌دهد.

جدول ۴

نام فیلتر	$\lambda_c(\text{nm})$
U	۳۶۵
B	۴۴۵
V	۵۵۱
R	۶۵۸
I	۸۰۶
J	۱۲۲۰
K	۲۱۹۰
L	۳۴۵۰
M	۴۷۵۰

ستاره‌ی TRAPPIST-1 که اخیراً وجود ۷ سیاره‌ی سنگی به دور آن کشف شده، یک کوتوله‌ی بسیار سرد از رده‌ی طیفی M8.2V با دمای ۲۵۵۰ کلوین است. نمودار شدت تابشی بر حسب طول موج این ستاره را برای طول موج‌های جدول بالا رسم کنید. تابع پلانک رابطه‌ی شدت تابشی با دما و طول موج را مشخص می‌کند.

$$B_{\lambda}d\lambda = \frac{2hc^2/\lambda^5}{e^{hc/\lambda kT} - 1} d\lambda$$



روابط برازش خط راست

$$y = A + Bx$$

$$d_i = y_i - (A + Bx_i)$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

$$A = \bar{y} - B\bar{x}$$

$$(\Delta B)^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

$$(\Delta A)^2 = \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \right) \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

$$y = Bx$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

$$(\Delta B)^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 1}$$

به نام خدا

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»



دوازدهمین دوره‌ی طلای المپیاد نجوم و اخترفیزیک

بخش تحلیل داده

آزمون میان‌دوره

۲۳ فروردین ۱۳۹۶

مدت آزمون: ۳۳۰ دقیقه (۸:۳۰ تا ۱۴:۰۰)

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است به موارد زیر توجه فرمایید:

- (۱) این آزمون ۱۹ سؤال دارد و زمان آن ۳۳۰ دقیقه است.
- (۲) به همراه دفترچه‌ی سؤالات، دفترچه‌ی پاسخ‌نامه، ۵ کاغذ رسم نمودار، ۱ جدول و چرک نویس در اختیار شما قرار گرفته است.
- (۳) در این آزمون می‌توانید از ماشین حساب خودتان که قابلیت برنامه‌ریزی ندارد، استفاده کنید.
- (۴) همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی مجاز نیست.

ح) کلیه‌ی حقوق این سؤالات برای معاونت دانش‌پژوهان جوان محفوظ است.



ثوابت فیزیکی و نجومی

توجه! ثوابت درون جدول خطا ندارند.

مقدار	کمیت
$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$	ثابت جهانی گرانش G
$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	سرعت نور c
$5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$	ثابت استفان-بولتزمن σ
$3.09 \times 10^{16} \text{ M}$	پارسک pc
$9.46 \times 10^{15} \text{ M}$	سال نوری ly
$1.99 \times 10^{30} \text{ Kg}$	جرم خورشید M_{\odot}
$3.85 \times 10^{26} \text{ W}$	درخشندگی خورشید L_{\odot}
$6.96 \times 10^8 \text{ m}$	شعاع خورشید R_{\odot}
1370 W m^{-2}	ثابت خورشیدی F_{\odot}
-26.8	قدر ظاهری خورشید



خاموشی جوی (۱۰۰ نمره) (طراح: فاطمه زرگرباشی)

می‌دانیم بخشی از نور ستاره‌ها هنگام عبور از جو جذب می‌شود؛ اما مقدار این جذب همیشه یکسان نیست. هر چه ستاره به افق نزدیک‌تر باشد، جذب بیشتری صورت می‌گیرد. در رصدخانه‌ای در شیراز ($\varphi = 29/5^\circ \text{ N}$) به رصد ستاره‌ای از رده‌ی طیفی O با مختصات استوایی ($\delta = 35^\circ$, $\alpha = 2^h 40^m$) پرداخته‌ایم. قدر ظاهری این ستاره در زمان‌های نجومی محلی مختلف در جدول ۱ گزارش شده است.

جدول ۱ - قدر بر حسب زمان نجومی

#	زمان نجومی (دقیقه)	قدر ستاره
۱	-24.618	4.684
۲	-70.109	4.749
۳	212.724	4.609
۴	14.565	4.651
۵	417.01	4.810
۶	147.302	4.602
۷	90.006	4.614
۸	185.20	4.605
۹	-36.77	4.707
۱۰	263.666	4.621
۱۱	-101.145	4.811
۱۲	347.386	4.693
۱۳	381.899	4.738
۱۴	293.04	4.638
۱۵	320.63	4.671

۱. نمودار قدر ستاره بر حسب LST را رسم کنید.

۲. زاویه‌ی سرسویی را برای هر یک از زمان‌های موجود در جدول به دست آورید و یادداشت کنید.

۳. ثابت کنید قدر یک ستاره که در جو دچار جذب می‌شود، از رابطه‌ی زیر پیروی می‌کند:

$$m = m_0 + k \sec z$$

که در آن m قدر ستاره در زاویه‌ی سرسویی z ، m_0 قدر ستاره بیرون جو و k ثابت است. مقدار k به چه عواملی بستگی دارد؟



۴. با برازش خط مناسب، مقدار عددی k و m_0 را برای این ستاره محاسبه کرده و خطای هر یک را گزارش کنید.
۵. ستاره‌ی دیگری از همان رده‌ی طیفی با میل 43° در نظر بگیرید که کمینه‌ی قدرش $4/637 \pm 0/006$ باشد. این کمینه در $LST = 6^h 24^m$ اتفاق می‌افتد. با توجه به اینکه مقدار k برای هر دو ستاره یکسان است، نمودار قدر ستاره‌ی دوم بر حسب LST را در نمودار سؤال ۱ رسم کنید (حداقل ۱۵ نقطه).
۶. بعد ستاره‌ی دوم چه قدر است؟ آیا زمانی وجود دارد که قدر هر دو ستاره یکسان دیده شود؟ اگر بله، زمان این اتفاق و قدر ستاره‌ها در آن زمان چه قدر است؟
۷. نسبت فاصله‌ی دو ستاره از زمین را به همراه خطا محاسبه کنید.

قبله (۱۰۰ نمره) (طراح: امیرحسین امیری)

در پی گسترش دین اسلام و مهم شدن جهت قبله، سازمان جهانی قبله‌یابی شهرها را به دو گروه «قبله حاده» و «قبله منفرجه» تقسیم کرده است که شهرهایی هستند که زاویه قبله‌ی‌شان از شمال، به ترتیب کمتر از ۹۰ درجه و بیشتر از ۹۰ درجه است. بعد از تشکیل این دو گروه، عده‌ای از مردم به این گونه طبقه‌بندی اعتراض کرده و اذعان نمودند که قبله‌ی آن‌ها زاویه‌ی قائمه با شمال می‌سازد و نام قبله‌ی خود را «قبله نودیا» گذاشتند.

حال، یکی از دانش‌پژوهان جوان تصمیم گرفته آماری از این گروه‌ها ارائه دهد؛ ولی چون به پایگاه داده‌ی سازمان جهانی قبله‌یابی دسترسی ندارد، نمی‌داند مختصات مکانی که مردم به سمتش نماز می‌خواند کجاست! او به زحمت مختصات جغرافیایی چند شهر که عضو قبله نودیا هستند را پیدا کرده و در جدول ۲ آورده است.

جدول ۲ - طول و عرض جغرافیایی

#	ϕ (deg)	l (deg)
۱	64	-40
۲	37	-20
۳	26	0
۴	22	20
۵	21	40
۶	22	60
۷	27	80
۸	38	100
۹	80	125

۸. مختصات مکانی که مردم به سمتش نماز می‌خوانند را با فرض شمالی بودن آن بیابید.

۹. به ازای زمانی که ϕ به ۹۰ درجه میل کند، l را بررسی کنید؛ یعنی چند داده با ϕ نزدیک ۹۰ درجه تولید کرده و l را برای آن‌ها محاسبه کنید. ۳ یا ۴ داده کافی است.

۱۰. رابطه‌ی تسطیح هم‌مساحت را به دست آورید.

۱۱. با تسطیح هم‌مساحت، مکان شهرهای فوق را روی کاغذ میلی‌متری رسم کنید و یک خم تقریبی از قبله نودیا بر روی نمودار رسم کنید.

۱۲. تقریباً چند درصد از شهرهای نیم‌کره‌ی شمالی عضو گروه قبله حاده هستند؟



ساختار ستاره (۱۳۰ نمره) (طراح: پارسا عالیان)

همان طور که می‌دانید، اخیراً ستاره‌ای به نام Trappist-1 یافت شده است که هفت سیاره به دور آن می‌گردند. این ستاره یک کوتوله‌ی سرد با دمای 2550 K، شعاع $0.114 R_{\odot}$ و جرم $0.08 M_{\odot}$ است. دانشمندان تصمیم گرفته‌اند که برای بررسی ستاره‌ی مرکزی، یک کاوشگر به درون آن ارسال کنند. تخمین زده شده که کاوشگر می‌تواند فشار و دمای زیادی را تقریباً تا مرکز ستاره تحمل کند. کاوشگر از لحظه‌ی رسیدن به سطح ستاره، شروع به ارسال داده می‌کند. اما متأسفانه پس از پیمودن عمقی از ستاره، ارسال داده‌ها قطع می‌شود. داده‌های ارسال شده توسط کاوشگر در جدول ۳ آمده است.

جدول ۳ - چگالی بر حسب عمق

#	چگالی (kg m^{-3})	عمق بر حسب شعاع ستاره
۱	2801.95	0.008
۲	2259.86	0.007
۳	1883.31	0.006
۴	1611.00	0.005
۵	1308.50	0.004
۶	976.42	0.003
۷	601.00	0.002
۸	313.84	0.001

با وجود ناقص بودن داده‌ها، دانشمندان تصمیم گرفته‌اند ستاره را تحلیل کنند و به نتایج فیزیکی در مورد آن برسند. در این بخش لازم است اطلاعات خواسته شده را در جدول پاسخ‌نامه یادداشت کرده و در پایان امتحان، به همراه پاسخ‌نامه‌ی خود تحویل دهید.

۱۳. معادله‌ی خط مناسب گذرنده از داده‌های بالا را به دست آورده و در نمودار رسم کنید.

۱۴. طبق مشخصات دریافت شده از ستاره، انتظار می‌رود که تابع چگالی ستاره به شکل زیر باشد:

$$\rho(x) = k\rho_0 \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi x^\alpha}{2}\right)}{x^\alpha} e^{-0.01(1-x)^2} - 1 \right]$$

که در آن $\alpha = \pi/4$ ، ρ_0 چگالی مرکز ستاره و k ثابت است. هم‌چنین $x = r/R$ است. تابع چگالی در نزدیکی سطح را بسط داده و مقادیر ρ_0 و k را به دست آورید.



۱۵. چگالی را در شعاع‌های داده شده در جدول پاسخ‌نامه محاسبه کنید. نمودار $4\pi r^2 \rho$ بر حسب r را رسم کنید. فاصله‌ی بین شعاع‌ها را مساوی در نظر بگیرید.

۱۶. با توجه به نمودار سؤال ۱۵، جرم ستاره‌ی Trappist-1 را در شعاع‌های داده شده تخمین بزنید. با توجه به مقدار جرم ستاره، خطای نسبی جرم ستاره چه قدر است؟
حال می‌خواهیم با استفاده از معادلات تعادل، با استفاده از شرایط در سطح ستاره، شرایط مرکزی ستاره را تخمین بزنیم. معادله تعادل هیدرواستاتیک به شکل زیر است:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)}{r^2} \rho(r)$$

۱۷. شیب فشار را برای شعاع‌های داده شده در جدول به دست آورید.

۱۸. می‌دانیم فشار در سطح ستاره برابر با صفر است. نمودار فشار بر حسب فاصله از مرکز را رسم کنید. می‌توانید فرض کنید بین شعاع‌های جدول، مقدار شیب ثابت است. فشار مرکز ستاره چه قدر است؟
۱۹. در ستارگان رشته‌ی اصلی با $M = 0.08 M_{\odot}$ ، زنجیره‌ی $p - p$ غالب است. چگالی درخشندگی این زنجیره از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$\epsilon = \epsilon_0 \rho T^4$$

در رابطه‌ی بالا،

$$\epsilon_0 = 2.70 \times 10^{-34} \frac{\text{W m}^2}{\text{kg}^2 \text{ K}^4}$$

است. از آن‌جا که جرم این ستاره بسیار کم است، نرخ مصرف هیدروژن آن بسیار پایین است و در نتیجه ستاره با تقریب خوبی کاملاً از هیدروژن یونیده تشکیل شده است. فرض کنید گاز درون ستاره کامل باشد. با توجه به مشخصات فیزیکی ستاره، شعاع هسته را تخمین بزنید.



روابط برازش خطّ راست

$$y = A + Bx$$

$$d_i = y_i - (A + Bx_i)$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

$$A = \bar{y} - B\bar{x}$$

$$(\Delta B)^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

$$(\Delta A)^2 = \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \right) \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

$$y = Bx$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

$$(\Delta B)^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 1}$$

جدول اطلاعات بخش ساختار ستاره

#	شعاع (r)	چگالی (ρ)	$4\pi r^2 \rho$	جرم (M)	فشار (P)	شیب فشار ($\frac{dP}{dr}$)			
۱	۰								
۲									
۳									
۴									
۵									
۶									
۷									
۸									
۹									
۱۰									
۱۱									
۱۲									
۱۳	R								

می‌توانید اطلاعات دیگر را در خانه‌های خالی بنویسید.

به نام خدا

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان

مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»



دوازدهمین دوره‌ی طلای المپیاد نجوم و اخترفیزیک

بخش تحلیل داده

آزمون مفاهیم پایه‌ی تحلیل داده ۲

۱۹ تیر ۱۳۹۶

مدت آزمون: ۳۱۵ دقیقه

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است به موارد زیر توجه فرمایید:

- (۱) این آزمون ۲ بخش دارد که زمان آن‌ها به ترتیب ۱۵۰ و ۱۶۵ دقیقه است. بخش اول شامل ۶ سؤال کوتاه‌پاسخ و ۵ سؤال تشریحی است. بخش دوم شامل ۳ سؤال بلند است.
- (۲) به همراه دفترچه‌ی سؤالات، دفترچه‌ی پاسخ‌نامه، ۱ عدد نمودار، ۴ کاغذ رسم نمودار و چرک نویس در اختیار شما قرار گرفته است.
- (۳) در این آزمون می‌توانید از ماشین حساب خودتان که قابلیت برنامه‌ریزی ندارد، استفاده کنید.
- (۴) همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی مجاز نیست.

Ⓒ کلیه‌ی حقوق این سؤالات برای معاونت دانش‌پژوهان جوان محفوظ است.



ثوابت فیزیکی و نجومی

توجه! ثوابت درون جدول خطا ندارند.

کمیت	مقدار
G ثابت جهانی گرانش	$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$
h ثابت پلانک	$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$
k ثابت بولتزمن	$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$
c سرعت نور	$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$
e بار الکترون	$1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$
pc پارسک	$3.09 \times 10^{16} \text{ m}$
M_{\oplus} جرم زمین	$5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$
R_{\oplus} شعاع زمین	6380 km

جدول بارم‌بندی سؤالات

سؤال	بارم	سؤال	بارم	سؤال	بارم
۱	۵	۷	۱۲	۱۲	۱۶
۲	۵	۸	۸	۱۳	۳۲
۳	۵	۹	۱۲	۱۴	۴۰
۴	۸	۱۰	۱۲		
۵	۵	۱۱	۸		
۶	۸				

بلند

تشریحی

کوتاه پاسخ

بخش اول (زمان: ۱۵۰ دقیقه)

سؤالات کوتاه پاسخ

توجه! در این سؤالات، نمره‌ای به راه حل تعلق نمی‌گیرد. در پاسخنامه علاوه بر عدد نهایی، روش تعیین ارقام بامعنی را هم بنویسید.

سؤال ۱ [طراح: محمدهادی ستوده]: در مراسم اعلام نتایج مسابقات جهانی که روز ۲۹ آبان در یکی از سواحل شهر فوکت (Phuket) تایلند برگزار می‌شود، قرار است همزمان با غروب خورشید، برنده‌ی کاپ خلاقیت تحلیل داده اعلام شود. سمت خورشید در زمان اعلام نتیجه را به دست آورید.



شکل ۱

عرض جغرافیایی فوکت $7/952^\circ$ و تمایل محوری زمین $22/452^\circ$ است. یک سال $365/3$ روز است.

سؤال ۲ [طراح: محمدهادی ستوده]:

در یک رصدخانه با استفاده از چند ابزار یکسان، مدت زمان یک رویداد GRB به صورت زیر اندازه‌گیری شده است.

جدول ۲

#	1	2	3	4	5	6	7
$\Delta t_{GRB} (s)$	23	25	24	24	25	23	22

داده‌ی پنجم و میانگین داده‌ها را گزارش کنید.



سؤال ۳ | طراح: محمد‌هادی ستوده:

نتایج اخیر منتشر شده از فعالیت یک شتاب‌دهنده‌ی ذرات که برای آشکارسازی ماده‌ی تاریک استفاده می‌شود، نشان می‌دهد که حد بالای جرمی نوترینوی استریل $^1 \text{keV} \pm 0.3/7$ است. تکانه‌ی این ذره را در حد 0.23 ± 0.981 به دست آورید.

سؤال ۴ | طراح: محمد‌هادی ستوده:

بر اساس آخرین اندازه‌گیری‌ها، پارامتر چگالی ماده‌ی تاریک سرد غیرنسبیتی $\Omega_{CDM} = 0.235$ و پارامتر چگالی ماده‌ی باریونی $\Omega_b = 0.044$ به دست آمده است. فرض کنید کیهان تخت است.

الف) اگر بقیه‌ی کیهان با انرژی تاریک پر شده باشد، پارامتر چگالی انرژی تاریک (Ω_{DE}) را به دست آورید.

ب) مقدار ثابت هابل از کیهان محلی $^1 \text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ $73/2$ به دست می‌آید. چگالی انرژی انرژی تاریک (u_{DE}) را بر حسب الکترون ولت بر کیلوپارسک مکعب (eV kpc^{-3}) محاسبه کنید.

ج) اگر برای ثابت هابل از مقدار $^1 \text{km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$ $67/82$ که از داده‌های ماهواره‌ی پلانک به دست آمده است استفاده کنیم، چگالی انرژی انرژی تاریک (u_{DE}) بر همان حسب (!) چه قدر به دست می‌آید؟

د) انحراف نسبی u_{DE} به دست آمده از CMB نسبت به مقدار کیهان محلی چه قدر است؟

سؤال ۵ | طراح: شهاب‌الدین محین: داده‌های جدول ۲ را به صورت درست گزارش کنید.

جدول ۲

#	گزارش اولیه
1	6.8995 ± 0.004534
2	95995 ± 8470.134
3	$863.53124 \times 10^{-6} \pm 86.636 \times 10^{-8}$
4	$6.85945 \text{ Gpc} \pm 1.35626 \text{ Mpc}$
5	$8659.744537425 \pm 23.6895134$
6	$0.00002477 \pm 0.000001858 \text{ rad yr}^{-1}$

برای افرادی که از این سؤال نمره‌ی کامل دریافت نکنند، تنبیهاتی در نظر گرفته شده است!



سؤال ۶ [طراح: پارسا عالیان]: ماهواره‌ای در مداری نزدیک به مدار سهموی در حال حرکت است. مسیر دقیق این ماهواره مشخص نیست. داده‌های شعاع مداری و سرعت این ماهواره برای ۱۳ نقطه از مسیرش داده شده است.

جدول ۳

#	$r (R_{\oplus})$	$v (\text{km s}^{-1})$	#	$r (R_{\oplus})$	$v (\text{km s}^{-1})$
1	4.75	2.247	8	5.42	2.472
2	2.24	2.467	9	52.60	2.624
3	6.89	2.758	10	11.20	2.644
4	2.97	2.493	11	22.24	2.655
5	3.69	2.476	12	2.02	2.686
6	10.25	2.678	13	2.83	2.706
7	3.03	2.526			

با توجه به این اعداد، احتمال این که مدار ماهواره به شکل بیضی یا هذلولی باشد چه قدر است؟

سوالات تشریحی

سؤال ۷ [طراح: محمدهادی ستوده]:

بهرام، نمودار پروفایل دمایی یک قرص برافزایشی (دما بر حسب فاصله از مرکز) را رسم کرده است. اما متأسفانه نمودار رسم شده نارسایی‌هایی دارد.

مشکلاتی که در این نمودار می‌بینید را بنویسید. همچنین برای ۳ تا از داده‌ها میله‌های خطا را در همان نمودار رسم کنید. دقت اندازه‌گیری فاصله ۲۰٪، کران بالای خطای دما ۳۰۰۰۰۰ کلوین و کران پایین خطای دما ۱۰۰۰۰۰ کلوین است.

سؤال ۸ [طراح: شهاب‌الدین محین]:

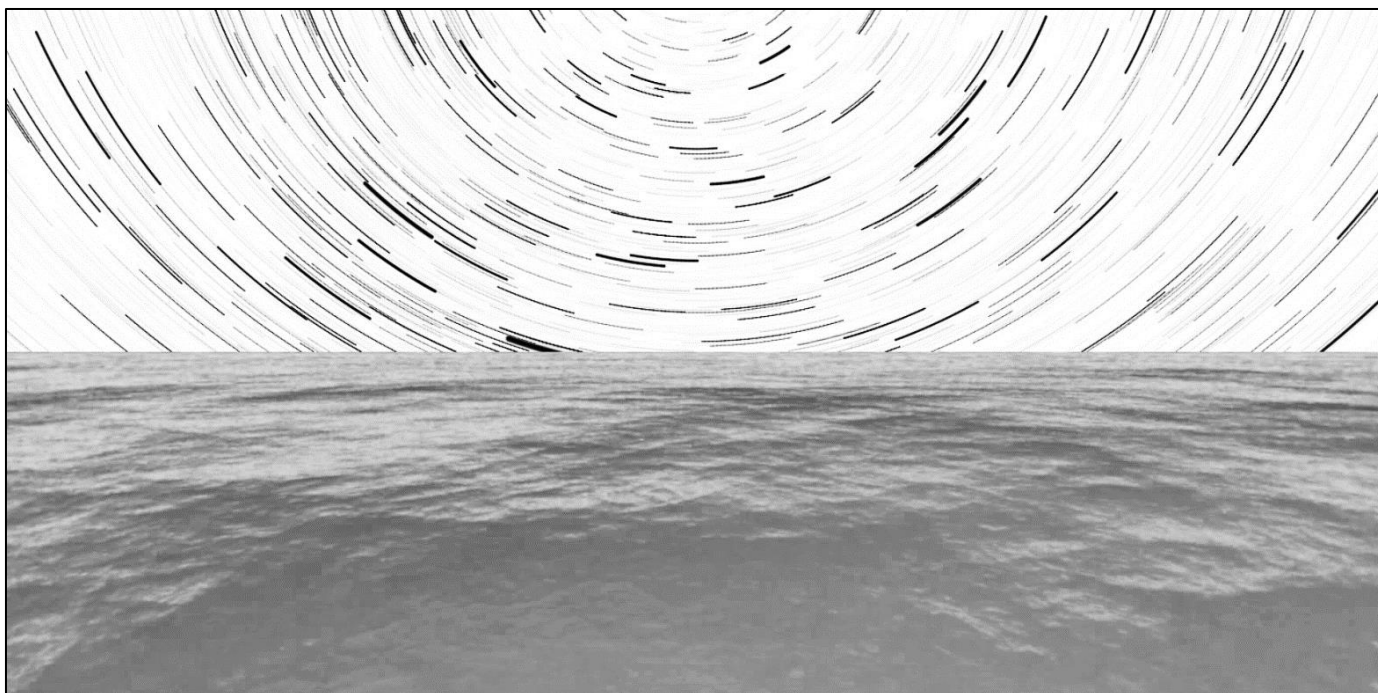
اثبات کنید که رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i^2 = S_y^2 (1 - r^2)$$

r ضریب همبستگی خطی، $S_y^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2$ و $d_i = y_i - ax_i - b$ است.

سؤال ۹ | طراح: محمد‌هادی ستوده:

امیرحسین موسوی، عکاس نجومی معروف، در یکی از سفرهای دریایی خود تصمیم گرفت یک تصویر ردّ ستارگان^۱ به مرکز نقطه‌ی شمال افق ثبت کند. شکل زیر، تصویر او را پس از پردازش نشان می‌دهد.



شکل ۲

تسطیح این عکس استریوگرافیک است؛ پس اگر فاصله‌ی زاویه‌ای یک نقطه از مرکز تسطیح θ باشد، روی کاغذ به اندازه‌ی $x = C \tan(\theta/2)$ از مرکز تسطیح فاصله خواهد داشت.

با فرض این که $C = ۱۱/۵$ و بدون خطا است، عرض جغرافیایی عکس را به همراه خطایش تعیین کنید.

راهنمایی: تسطیح استریوگرافیک حافظ زاویه است!



سؤال ۱۰ | طراح: شهاب‌الدین محین:

یکی از راه‌های به دست آوردن دید نجومی^۱، محاسبه‌ی FWHM از روی تصویر تهیه شده با CCD است. مقادیر یک ردیف از اعداد پیکسل‌های CCD مطابق جدول ۵ است.

جدول ۵

#	1	2	3	4	5	6	7
Value	5	727	17195	49155	17290	740	3

با برازش منحنی گاوسی ابتدا σ و سپس FWHM را محاسبه کنید. (راهنمایی: $y = \frac{N_0}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$)

سؤال ۱۱ | طراح: شهاب‌الدین محین:

کمیتی را چند بار اندازه‌گیری کرده‌ایم و در متغیر تصادفی X ریخته‌ایم. تخمینی که در ادامه از X به دست خواهیم آورد را x_* می‌نامیم.

الف) معیار نخست برای تخمین، معیار کمترین مربعات^۲ است که در آن عبارت $error = E((X - x_*)^2)$ کمینه می‌شود. مقدار x_* مناسب را به دست آورید و سپس مقدار $error$ را به ازای x_* محاسبه شده بیابید.

ب) معیار دیگر برای تخمین، معیار خطای مطلق میانگین^۳ است. که در آن عبارت $error = E(|X - x_*|)$ کمینه می‌شود. مقدار x_* مناسب را به دست آورید و سپس مقدار $error$ را به ازای x_* محاسبه شده بیابید.

^۱ Seeing

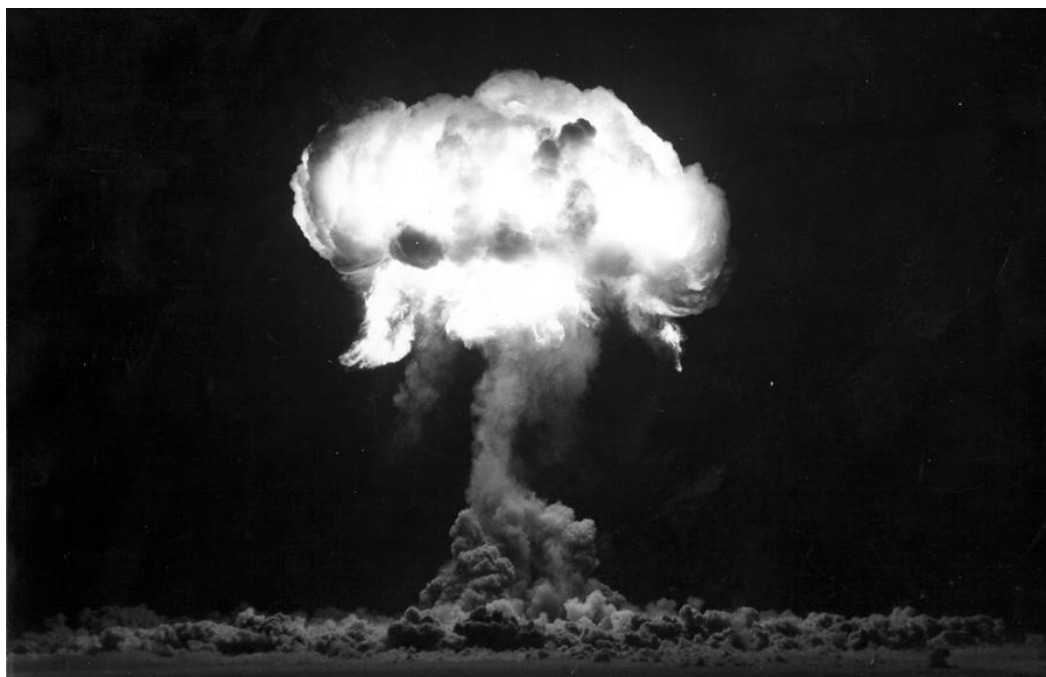
^۲ Least Squares

^۳ Mean Absolute Error

بخش دوم (زمان: ۱۶۵ دقیقه)

سؤال ۱۲ [طراح: پارسا عالیان]:

اولین آزمایش هسته‌ای^۱ در سال ۱۹۴۵ در نیومکزیکو انجام شد. به دلیل محرمانه بودن آزمایش، هیچ اطلاعاتی راجع به این بمب منتشر نشد و تنها چند روز بعد از آزمایش، تعدادی عکس از لحظه‌ی انفجار منتشر شد.



شکل ۳ - اولین بمب هسته‌ای

آقای تیلور تصمیم گرفته با تحلیل عکس‌های که در قسمت ب مشاهده می‌کنید، انرژی بمب منفجر شده را تخمین بزند.

(الف) با تحلیل ابعادی، شعاع آتش‌گوی^۲ بمب را برحسب چگالی هوا، انرژی اولیه‌ی بمب و زمان به دست آورید.

(ب) شعاع بمب در هر یک از تصاویر را اندازه‌گیری کرده و در یک جدول گزارش کنید. راه حل خود را به طور کامل توضیح دهید.

(ج) نمودار شعاع بمب بر حسب زمان را رسم کنید.

(د) با برازش خط بر داده‌هایی که به دست آوردید، انرژی اولیه‌ی بمب را تخمین بزنید. چگالی هوا $1/225 \pm$ و 0.3 kg m^{-3} است. ثابت تناسب قسمت الف را ۱ در نظر بگیرید.

^۱ The Trinity Nuclear Test

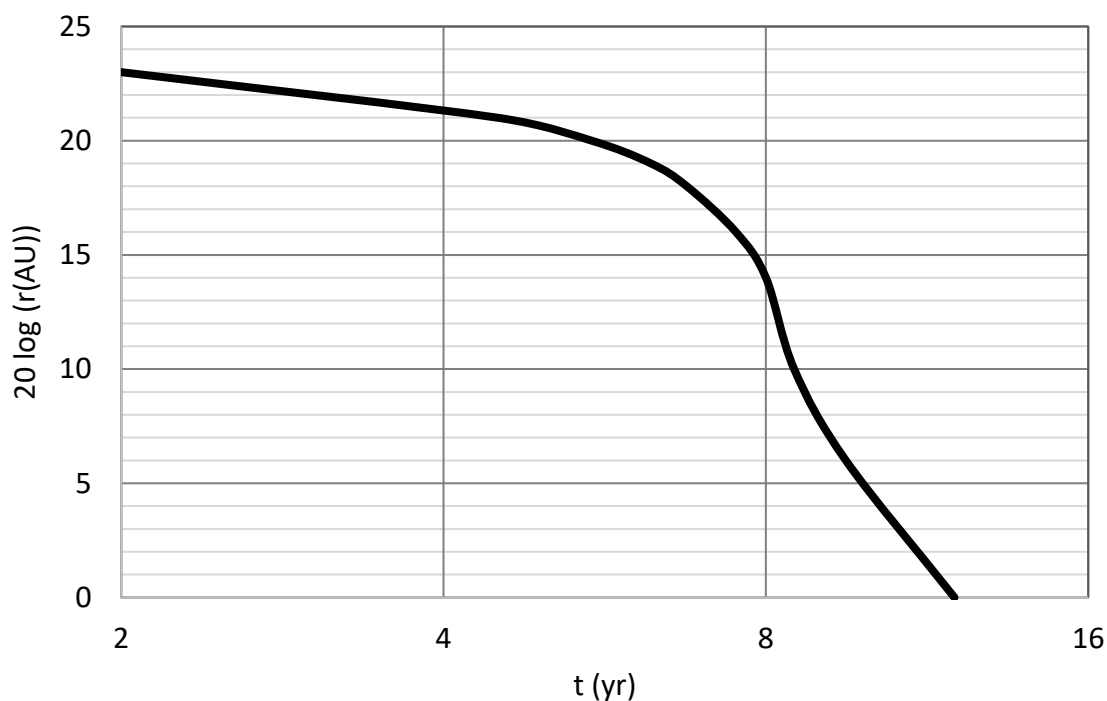
^۲ Fireball

سؤال ۱۳ اطراح: شهاب‌الدین محین:

یکی از زمینه‌های مهم در خصوص کنترل سیستم‌های ناوبری ناسا، پایدارسازی این سیستم‌ها است. سؤالی که در ادامه می‌بینید، بحث پایدارسازی را به صورت ساده شده به شما نشان می‌دهد. ان شاء الله در آینده در صورت انتخاب رشته‌های مهندسی، با این مباحث^۱ بیشتر آشنا خواهید شد.

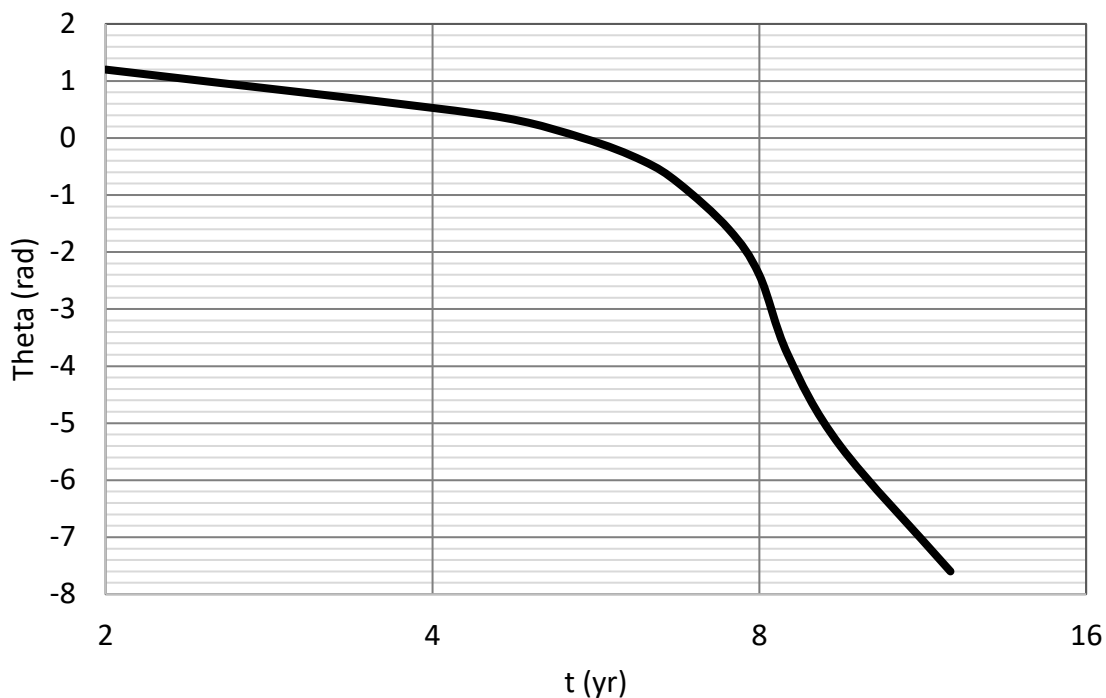
دو نمودار زیر فاصله (r) و زاویه‌ی (θ) متحرکی را بر حسب زمان (t) نشان می‌دهند. لطفاً به واحد کمیت‌های روی نمودار توجه فرمایید.

نمودار فاصله بر حسب زمان



شکل ۴

نمودار زاویه بر حسب زمان



شکل ۵

الف) در زمان‌های زیر، مقادیر r و θ را به همراه خطا (Δr و $\Delta \theta$) به دست آورده و در جدولی وارد کنید.

جدول ۶

#	t (yr)	#	t (yr)
1	2	6	7.5
2	4.5	7	8
3	5.5	8	8.5
4	6.25	9	9.5
5	6.75	10	12

در قسمت‌های بعدی از خطای r و θ صرف نظر کنید.

ب) نمودار قطبی r بر حسب θ را رسم نمایید.

ج) به داده‌های بالا یک منحنی مطابق با رابطه‌ی $r = r_0 e^{\alpha \theta}$ برازش کنید. خطای r_0 و α را نیز گزارش نمایید.

د) نمودار دکارتی (کارتزین) r بر حسب θ را رسم نمایید.

ه) با فرض این که نیرو از طرف جسمی در مرکز مختصات وارد می‌شود، آیا نیرو شعاعی است؟ چرا؟



سؤال ۱۴ | طراح: امیرحسین امیری:

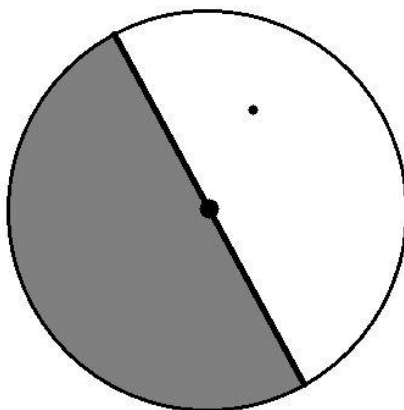
در فاصله‌ی ۶/۵ پارسی از زمین، منظومه‌ای شامل یک ستاره و یک سیاره‌ی بزرگ قرار گرفته است. مدار سیاره به دور ستاره‌ی مرکزی در صفحه‌ی آسمان قرار دارد. رصدگری با استفاده از یک تلسکوپ که فاصله‌ی کانونی آن ۱۲ متر است و به یک سی‌سی‌دی 1000×1000 با اندازه‌ی پیکسل $1 \mu m$ مجهز شده است، این منظومه را بررسی می‌کند.

پس از تنظیم تلسکوپ برای نگه داشتن ستاره در مرکز میدان دید، رصدگر با فواصل زمانی یکسان، از منظومه تصویربرداری می‌کند. جدول ۷ مختصات تصویر سیاره روی سی‌سی‌دی را در زمان‌های مختلف نشان می‌دهد.

جدول ۷

#	$t (10^8 s)$	$x (pi)$	$y (pi)$
1	0.00	76	31
2	0.33	59	59
3	0.66	35	80
4	0.99	7	93
5	1.33	-21	98
6	1.66	-48	97
7	2.00	-72	90
8	8.99	70	-62
9	9.32	81	-33
10	9.65	83	-2
11	9.99	76	31

به دلیل حواس‌پرتی رصدگر، گنبد رصدخانه کاملاً باز نشده است؛ به گونه‌ای که در تصاویر ثبت شده، لبه‌ی گنبد منطبق بر ستاره‌ی مرکزی است. در نتیجه تنها قسمتی از مسیر سیاره دیده می‌شود.



شکل ۶ - انطباق لبه‌ی گنبد رصدخانه بر ستاره‌ی مرکزی در میدان دید تلسکوپ

هدف رصدگر پیدا کردن نیم‌قطر طول (a) و خروج از مرکز (e) مدار سیاره و جرم ستاره مرکزی (M) است.

الف) با توجه به داده‌ها، دوره‌ی تناوب مداری سیاره را بیابید.

ب) پارامتر η به صورت $\eta = \sqrt{x^2 + y^2}$ تعریف می‌شود. مقدار آن را برای تمامی رصدها بیابید.

ج) فاصله‌ی سیاره از ستاره‌ی مرکزی (r) را برای تمامی رصدها به دست آورید.

د) نمودار r بر حسب t را رسم کنید و با توجه به آن، فاصله‌ی حضیض مدار را تخمین بزنید. برای دقیق‌تر شدن تخمین خود، بهتر است داده‌ها را با خطّ راست به هم وصل کنید. همان‌طور که می‌دانید، می‌توان فاصله‌ی حضیض را به پارامترهای مداری ربط داد.

در ادامه رصدگر سعی می‌کند با گرفتن انتگرال زمانی از تابع $f(r) = r^n$ بر روی بازه‌ای که سیاره قابل مشاهده است، اطلاعات دیگری راجع به مدار به دست بیاورد.

ه) به ازای $n = -2$ ، انتگرال زیر را بر روی بازه‌ی قابل مشاهده حساب کنید.

$$\int f(r) dt$$

این کار به تعیین تکانه‌ی زاویه‌ای واحد جرم (h) کمک می‌کند.

و) با استفاده از ۳ معادله‌ای که برای دوره‌ی تناوب، فاصله‌ی حضیض و تکانه‌ی زاویه‌ای در قسمت‌های قبل به دست آوردید، مقدار a ، e و M را تعیین کنید.



روابط برازش خط راست

$$y = A + Bx$$

$$d_i = y_i - (A + Bx_i)$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

$$A = \bar{y} - B\bar{x}$$

$$(\Delta B)^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

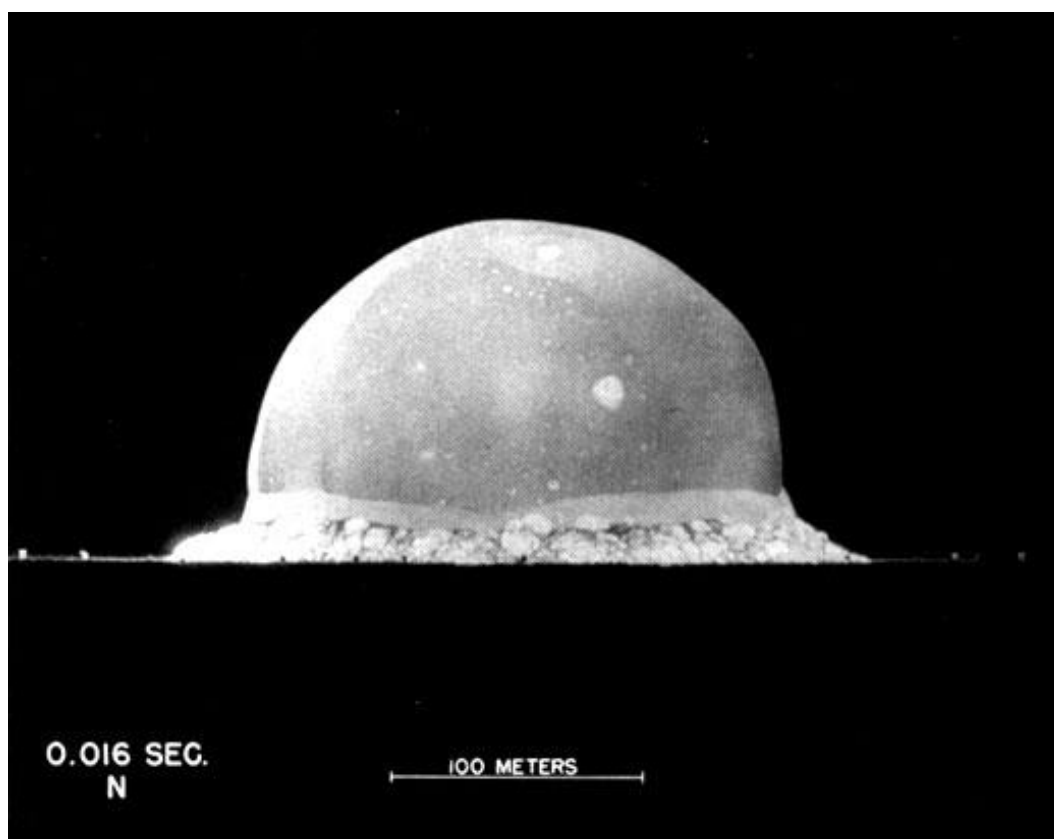
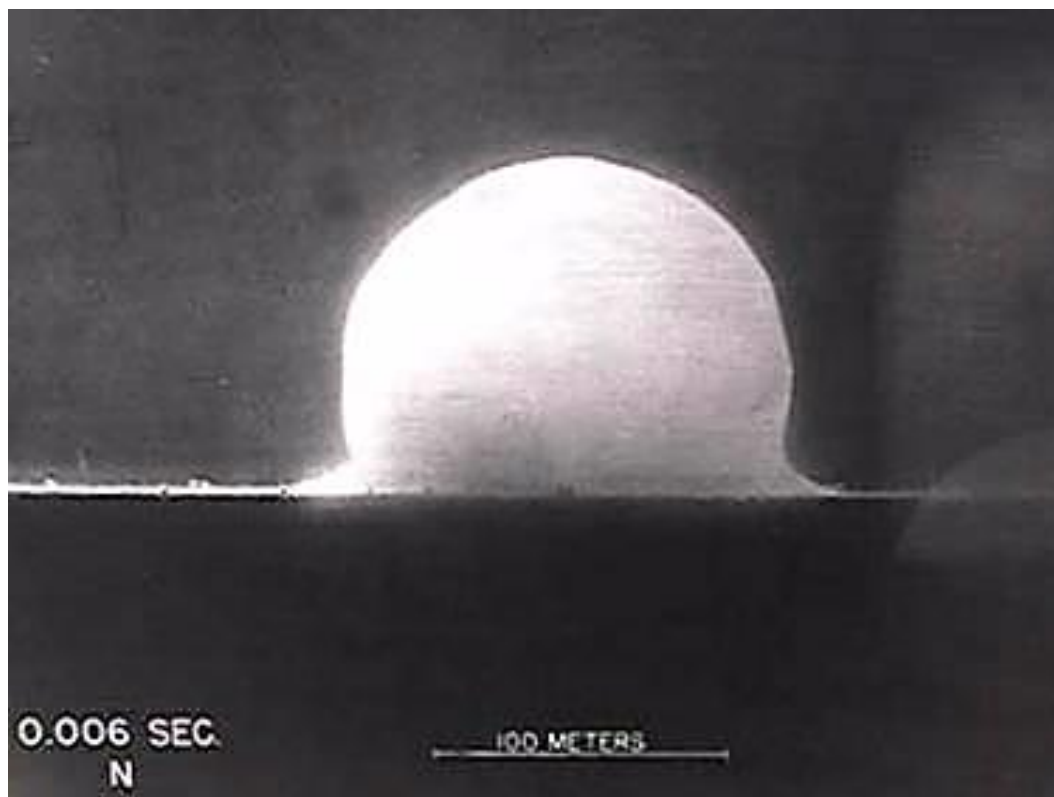
$$(\Delta A)^2 = \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \right) \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

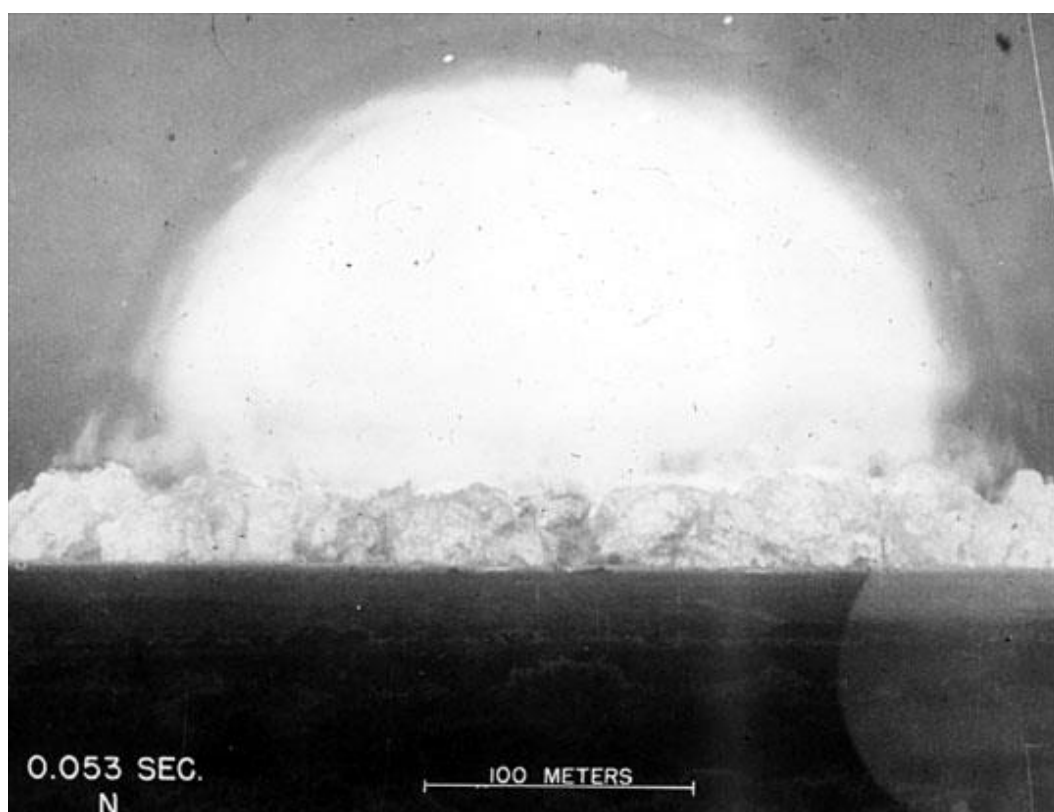
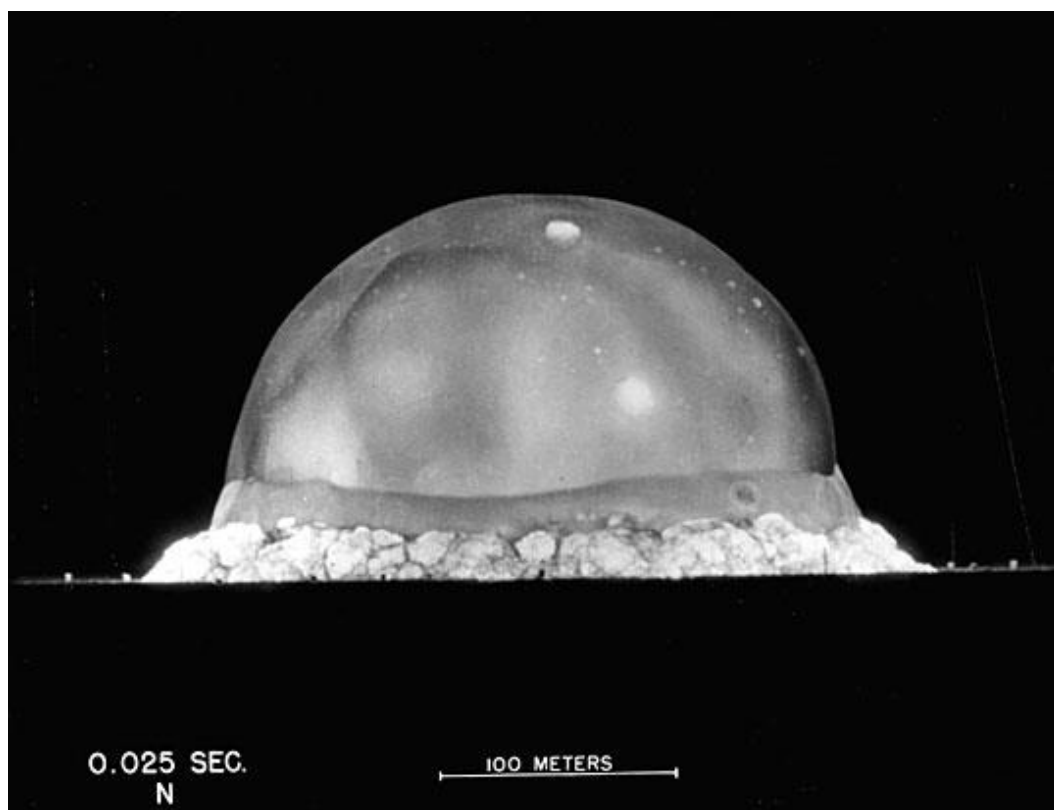
$$y = Bx$$

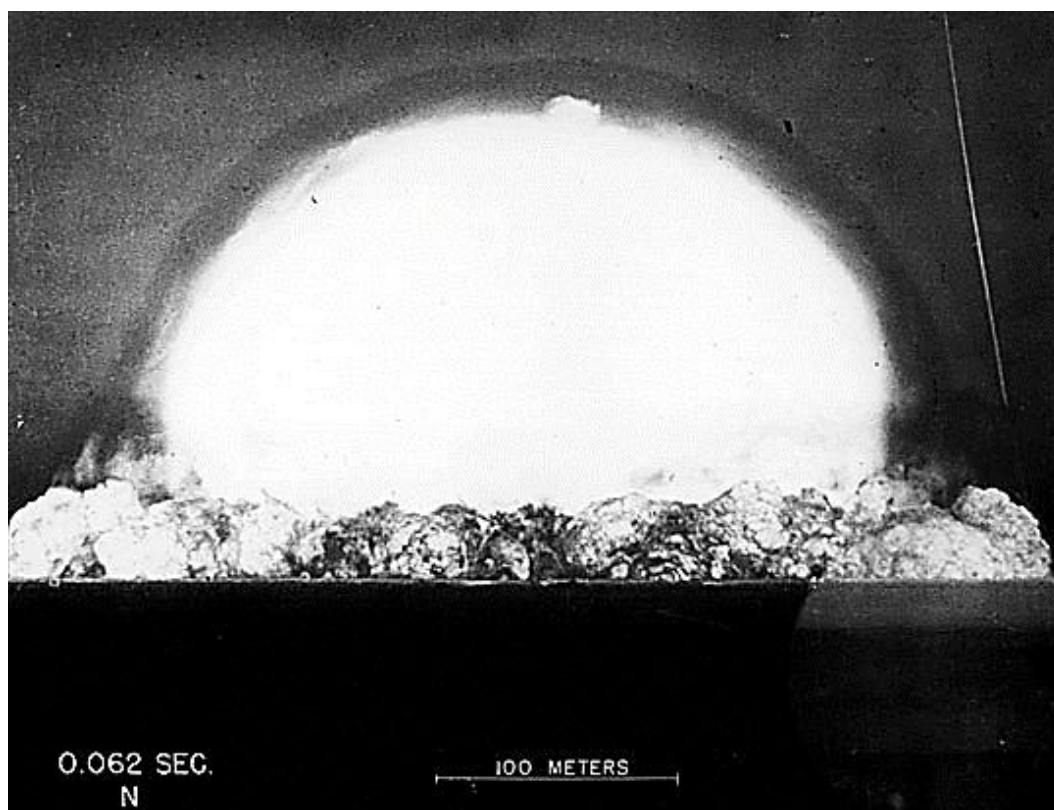
$$B = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

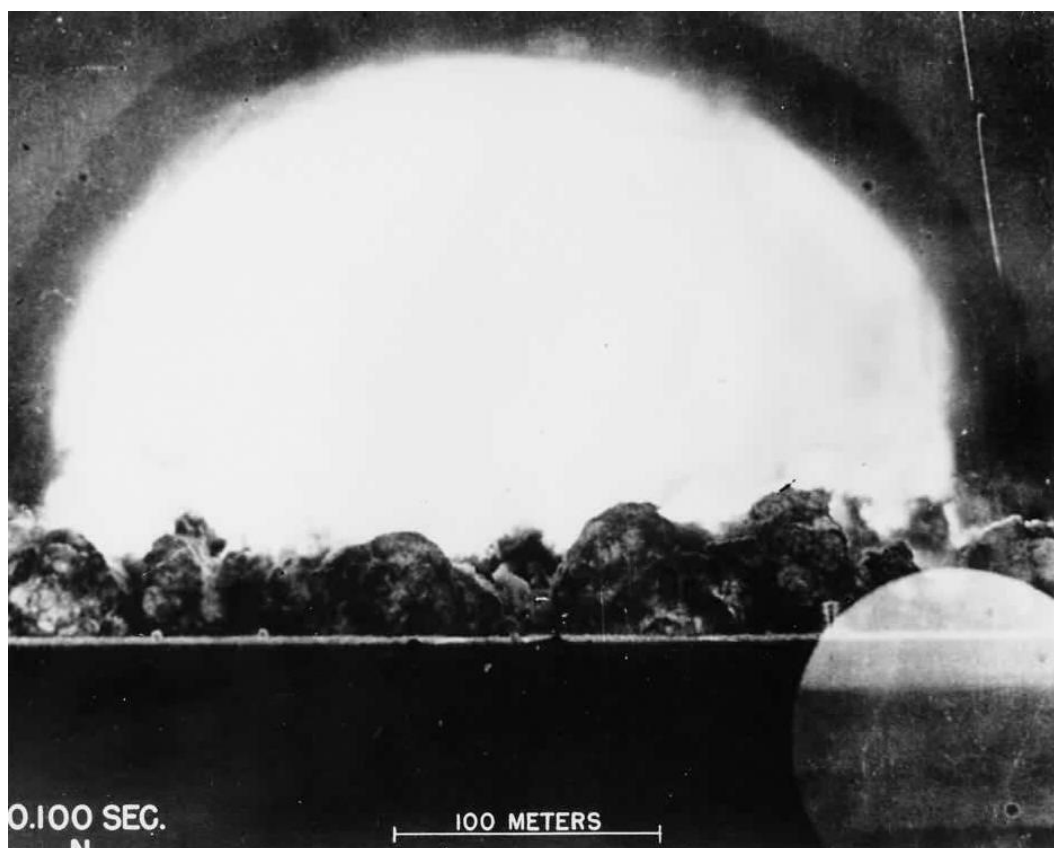
$$(\Delta B)^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 1}$$

تصاویر مربوط به سؤال ۱۲

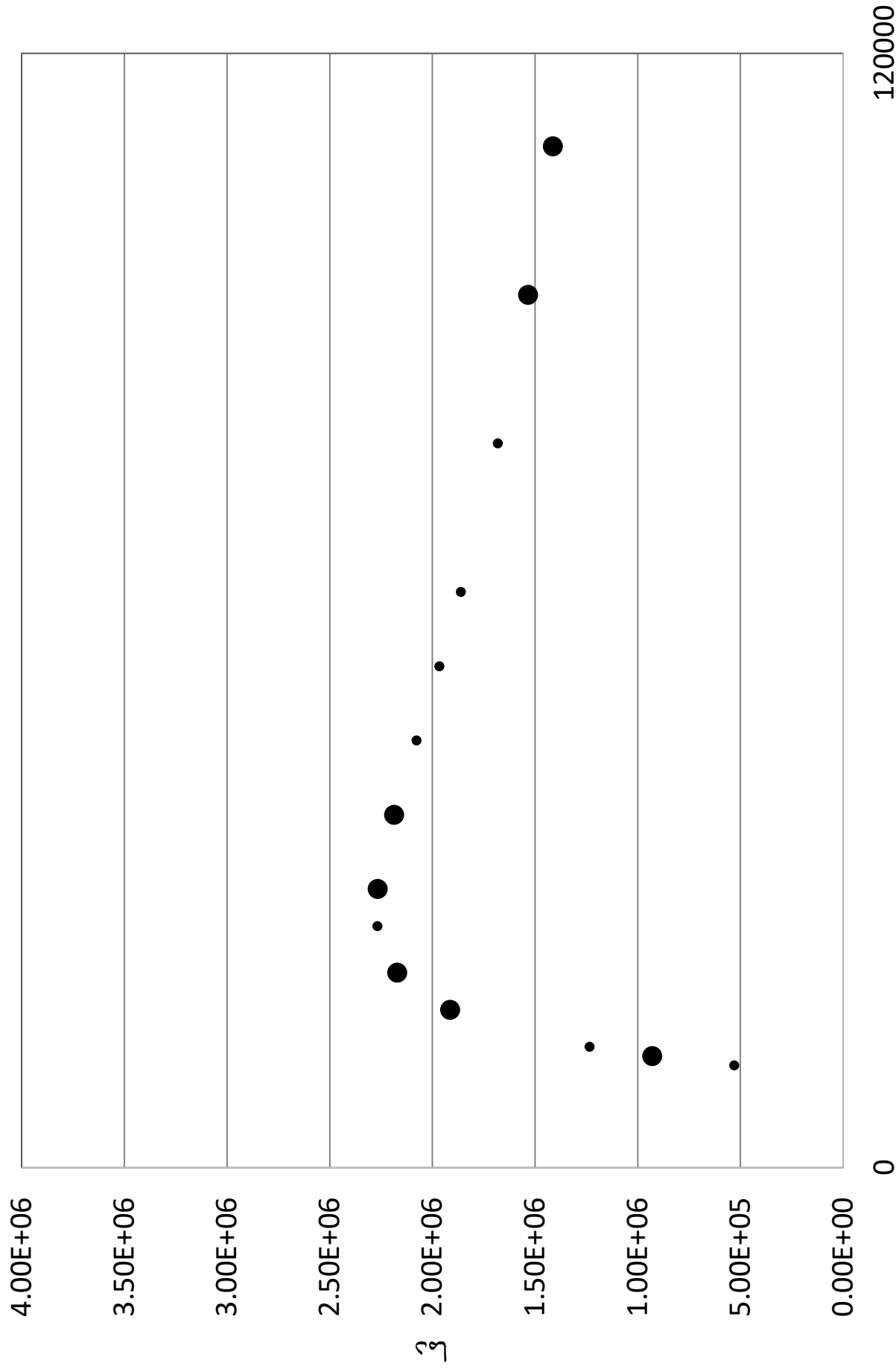








نمودار دما بر حسب کلورین در مقابل فاصله



به نام خدا

وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش پژوهان جوان

مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»



دوازدهمین دوره‌ی طلای المپیاد نجوم و اخترفیزیک

بخش تحلیل داده

آزمون تحلیل داده با اکسل

۱۷ مرداد ۱۳۹۶

مدت آزمون: ۲۱۰ دقیقه (۹:۰۰ تا ۱۲:۳۰)

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است به موارد زیر توجه فرمایید:

- (۱) این آزمون ۱۵ سؤال دارد و زمان آن ۲۱۰ دقیقه است.
- (۲) به همراه دفترچه‌ی سؤالات، دفترچه‌ی پاسخ‌نامه، چرک نویس و ۲ فایل در اختیار شما قرار گرفته است.
- (۳) در این آزمون می‌توانید از ماشین حساب خودتان که قابلیت برنامه‌ریزی ندارد، استفاده کنید.
- (۴) همراه داشتن هر گونه کتاب، جزوه، یادداشت و لوازم الکترونیکی به جز لپ‌تاپ مجاز نیست.
- (۵) پس از انجام هر سؤال، فایل خود را در پوشه‌ی مربوط به آن ذخیره (Save As) کنید.
- (۶) فایل‌های نهایی خود را در یک پوشه به نام خودتان ذخیره کرده و در پایان، به همراه پاسخ‌نامه تحویل دهید.

(ج) کلیه حقوق این سؤالات برای معاونت دانش‌پژوهان جوان محفوظ است.



ثوابت فیزیکی و نجومی

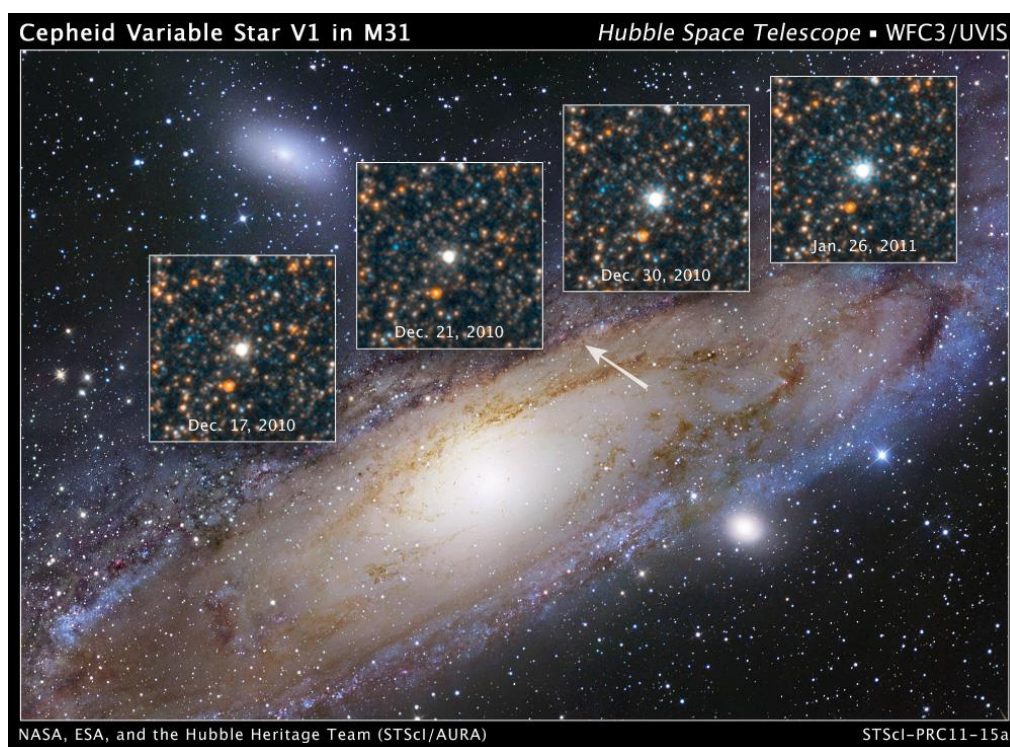
کمیت	مقدار
G	ثابت جهانی گرانش $\text{m}^3 \text{s}^{-2} \text{kg}^{-1}$ 6.67×10^{-11}
c	سرعت نور m s^{-1} 3.00×10^8
σ	ثابت استفان-بولتزمن $\text{W m}^{-2} \text{K}^{-4}$ 5.67×10^{-8}
pc	پارسک m 3.09×10^{16}
M_{\odot}	جرم خورشید kg 1.99×10^{30}
L_{\odot}	درخشندگی خورشید W 3.85×10^{26}
M_{sun}	قدر مطلق خورشید 4.83
M_{\oplus}	جرم زمین kg 5.974×10^{24}
R_{\oplus}	شعاع زمین km 6378
	شبانه‌روز نجومی s 86164

فاصله‌سنجی به کمک متغیرهای قیفاووسی (۶۰ نمره) (طراح: شهاب‌الدین محین)

به ستارگان متغیری که تپش‌هایشان در راستای شعاعی است، متغیر قیفاووسی گفته می‌شود. خانم لویت^۱ با مطالعه‌ای که در سال ۱۹۰۸ روی بیش از هزاران ستاره‌ی متغیر در ابرهای ماژلانی انجام داد، نتیجه گرفت که بین درخشندگی و دوره‌ی تناوب ستارگان قیفاووسی کلاسیک، رابطه‌ی زیر وجود دارد

$$\langle M_V \rangle = A \log P + B$$

در نتیجه می‌توان با کالیبره کردن این رابطه برای ستارگان نزدیک، به صورت غیرمستقیم ستارگان دوردست را فاصله‌سنجی کرد.



شکل ۱ - فاصله‌سنجی کهکشان آندرومدا به کمک مطالعه‌ی ستارگان متغیر قیفاووسی

در کاربرد $\text{Period} - \text{Luminosity}$ از فایل «Cepheid Variable.xlsx»، داده‌های دوره‌ی تناوب و قدر مطلق مری چند ستاره‌ی قیفاووسی داده شده است.

۱. نمودار قدر مطلق مری میانگین $\langle M_V \rangle$ را بر حسب لگاریتم دوره‌ی تناوب $\log P$ رسم کنید. در نمودار میله‌های خطا را هم نشان دهید.

۲. با برازش خط بر این داده‌ها، رابطه‌ی دوره‌ی تناوب - درخشندگی را به دست آورید. خطای شیب و عرض از مبدأ را هم ذکر کنید.

^۱ Henrietta Swan Leavitt



در کاربرد Photometry، اطلاعات نورسنجی ستاره‌ی U Aql توسط یک تلسکوپ زمینی، آورده شده است. اطلاعات داده شده شامل تاریخ ژولینانی خورشیدمرکزی (HJD)، قدر ظاهری مرئی و شاخص‌های رنگ است. با استفاده از این داده‌ها و سؤال‌های قبلی این بخش

۳. میانگین فاصله‌ی زمانی بین هر دو مشاهده‌ی متوالی چه قدر بوده است؟

۴. نمودار قدر ظاهری مرئی بر حسب زمان را رسم کنید. مبدأ زمانی را لحظه‌ی اولین رصد در نظر بگیرید.

۵. دوره‌ی تناوب ستاره را تخمین بزنید.

۶. فاصله‌ی ستاره از ناظر را به دست آورید.

رابطه‌ی دمای مؤثر با شاخص رنگ به صورت زیر است

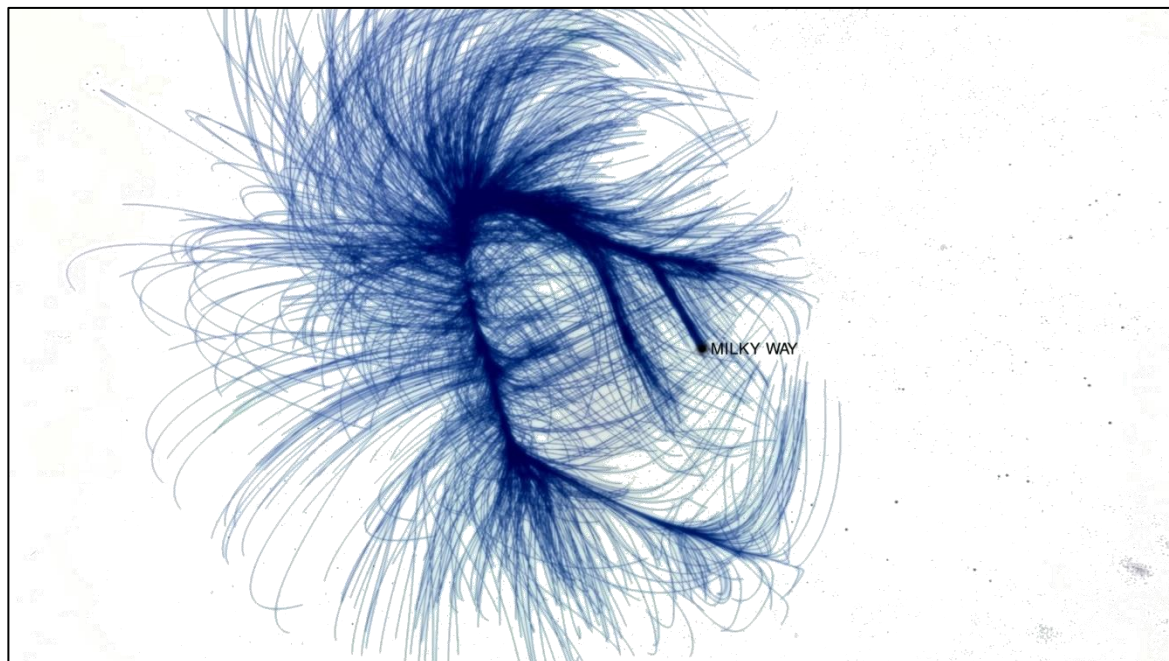
$$T_{eff} = \begin{cases} 10^{\frac{14/551 - (B-V)}{3/684}} & B - V > 0.413 \\ 10^{4/945 - \sqrt{1/0.87353 + 2/906977 \times (B-V)}} & B - V < 0.413 \end{cases}$$

۷. شعاع میانگین ستاره‌ی U Aql چه قدر است؟

۸. میانگین و انحراف معیار هر سه شاخص رنگ را در یک دوره‌ی تناوب به دست آورید.

تصحیح CMB و تعیین سرعت گروه محلی (۱۵۰ نمره) (طراح: محمد‌هادی ستوده)

یکی از اهداف علم کیهان‌شناسی، شناسایی ساختارهای موجود در کیهان و بررسی چگونگی تشکیل و تحول آن‌ها است. برای این کار می‌توانیم از دانش خود نسبت به کیهان محلی و هم‌چنین تابش زمینه‌ی کیهانی کمک بگیریم.



شکل ۲- ابرخوشه‌ی محلی (لانیاکیا)^۱ و مکان کهکشان راه شیری در آن

فایل «Raw CMB.txt» داده‌های خام ماهواره‌ی پلانک از تابش زمینه‌ی کیهانی را نشان می‌دهد که تنها اثر حرکت ماهواره به دور خورشید در آن‌ها اصلاح شده است. با توجه به طیف دریافت شده از هر نقطه و مطابقت آن با طیف جسم سیاه، به هر نقطه یک دما نسبت داده شده است.

برای رسم نقشه‌ی CMB، از تسطیح مولواید^۲ استفاده می‌شود که حافظ مساحت است و مؤلفه‌های x و y یک نقطه با عرض کهکشانی b و طول کهکشانی l طبق آن از روابط زیر به دست می‌آید

$$x = R \frac{\sqrt{2}}{\pi} l \cos \theta$$

$$y = R \sqrt{2} \sin \theta$$

R شعاع کره‌ی تسطیح شده و θ زاویه‌ی کمکی است. مقدار θ از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$2\theta + \sin 2\theta = \pi \sin b$$

^۱ Laniakea

^۲ Mollweide Projection

۹. نقشه‌ی تسطیح شده‌ی CMB را طبق مقیاس رنگی زیر رسم کنید. روش خود برای این کار را به طور دقیق و کامل شرح دهید.

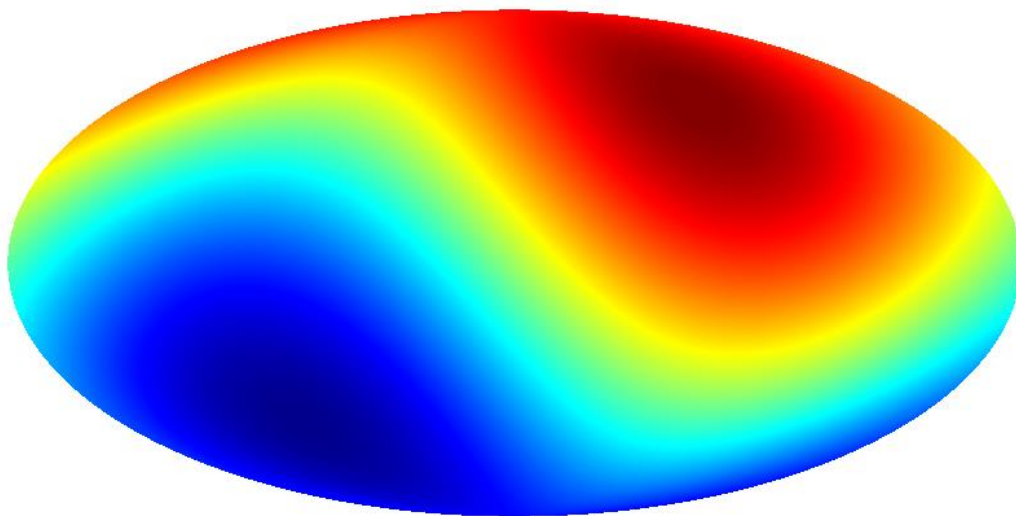


شکل ۳

راهنمایی ۱: می‌توانید مقیاس بالا را به چند قسمت هم‌رنگ تقسیم کنید (حداقل ۶ قسمت). نحوه‌ی تقسیم‌بندی مقیاس را در پاسخ‌نامه به طور دقیق شرح دهید.

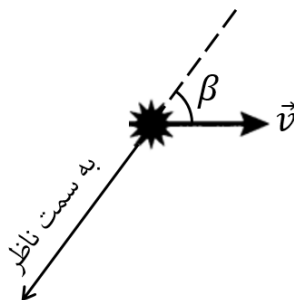
راهنمایی ۲: اندازه‌ی نقاط را طوری تنظیم کنید که نقطه‌ها هم‌پوشانی زیادی نداشته باشند؛ هم‌چنین فضای خالی زیادی در نمودار دیده نشود.

همان طور که مشاهده می‌کنید، روی نقشه‌ای که رسم کردید اثر دوقطبی دیده می‌شود. یعنی دمای اندازه‌گیری شده برای تابش جسم سیاه در یک نیمه از آسمان بیشتر از دمای میانگین و در نیمه‌ی دیگر آسمان کمتر از دمای میانگین است.



شکل ۴ - اثر دوقطبی CMB

عامل این پدیده اثر دوپلری است که به خاطر حرکت خورشید نسبت به CMB به وجود آمده است.



شکل ۵

طبق رابطه‌ی نسبیتی اثر دوپلر، در صورتی که سرعت یک منبع نسبت به ناظر v باشد و زاویه‌ی بین بردار سرعت نسبی منبع و بردار واصل ناظر به منبع را با β نشان دهیم، بسامد نور دریافتی از منبع به صورت زیر تغییر می‌کند

$$\frac{f_{obs}}{f_{rest}} = \frac{\sqrt{1 - v^2/c^2}}{1 + (v/c) \cos \beta}$$

۱۰. ثابت کنید اگر سرعت حرکت خورشید نسبت به CMB خیلی کمتر از سرعت نور باشد ($v \ll c$)، دمای اندازه‌گیری شده برای هر نقطه از CMB از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید

$$\frac{T_{obs}}{T_{rest}} \approx 1 + \frac{v}{c} \cos \alpha$$

α زاویه‌ی بین جهت مشاهده و جهت حرکت خورشید نسبت به CMB است.

۱۱. مختصات کهکشانی نقطه‌ای که خورشید به سمت آن حرکت می‌کند را تخمین بزنید. روش خود را به طور دقیق و کامل ذکر کنید.

۱۲. دمای لختی CMB (T_{rest}) و سرعت خورشید در چارچوب مرجع CMB را به دست آورید.

۱۳. با تصحیح اثر دوقطبی، نقشه‌ی CMB را طبق مقیاس رنگی شکل ۳ رسم کنید. نسبت انحراف معیار دماها به میانگینشان چه قدر است؟

می‌دانیم سرعت خورشید نسبت به مرکز کهکشان $\frac{220}{s} \text{ km}$ در جهت $(l, b) = (90^\circ, 0^\circ)$ است. همچنین کهکشان راه شیری نسبت به مرکز گروه محلی با سرعت $\frac{178}{s} \text{ km}$ به سمت $(l, b) = (65^\circ, -42^\circ)$ حرکت می‌کند.

۱۴. سرعت گروه محلی در چارچوب مرجع CMB و جهت آن را به دست آورید.

۱۵. با توجه به این که چارچوب مرجع CMB همراه با جریان هابلی حرکت می‌کند، آیا می‌توان منشأ حرکت گروه محلی را وجود یک جاذب بزرگ^۱ دانست؟ به نظر شما این جاذب چه نوع ساختاری می‌تواند باشد؟



روابط برازش خطّ راست

$$y = A + Bx$$

$$d_i = y_i - (A + Bx_i)$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

$$A = \bar{y} - B\bar{x}$$

$$(\Delta B)^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

$$(\Delta A)^2 = \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \right) \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

$$y = Bx$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

$$(\Delta B)^2 = \frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 1}$$

آزمون‌های تحلیل داده‌ی

دوره‌ی تابستانی ۱۳۹۷

آزمون مفاهیم پایه‌ی تحلیل داده

تاریخ: ۲۷ مرداد ۱۳۹۷

مدت زمان: ۲۴۰ دقیقه

آزمون تحلیل داده ۱

تاریخ: ۱۲ شهریور ۱۳۹۷

مدت زمان: ۲۷۰ دقیقه

آزمون تحلیل داده ۲

تاریخ: ۲۶ شهریور ۱۳۹۷

مدت زمان: ۲۷۰ دقیقه



وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی(ره)»



چهاردهمین دوره‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک

آزمون‌های میان‌دوره

آزمون مفاهیم پایه‌ی تحلیل داده

(۲۷ مرداد ۱۳۹۷ - ساعت ۸:۰۰ تا ۱۲:۰۰)

توجه: بارم سؤالات متفاوت است.

ثوابت فیزیکی و نجومی

(توجه! ثوابت این جدول بدون خطا هستند.)

مقدار	کمیت
$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$	G ثابت جهانی گرانش
$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	c سرعت نور
$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$	h ثابت پلانک
$1.38 \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$	k ثابت بولتزمن
$5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$	σ ثابت استفان-بولتزمن
$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$	m_H جرم اتم هیدروژن
$3.09 \times 10^{16} \text{ m}$	pc پارسک
4.83	قدر مطلق خورشید
$3.85 \times 10^{26} \text{ W}$	L_{\odot} درخشندگی خورشید
$6.96 \times 10^8 \text{ m}$	R_{\odot} شعاع خورشید
$5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$	M_{\oplus} جرم زمین
6380 km	R_{\oplus} شعاع زمین
86164 s	دورهی تناوب نجومی زمین
$6.39 \times 10^{23} \text{ kg}$	جرم مریخ
3390 km	شعاع مریخ
2.54 cm	۱ اینچ (1")

جدول بارم‌بندی سؤالات

سؤال	بارم	سؤال	بارم	سؤال	بارم
۱	۶	۶	۷	۱۱	۱۲
۲	۸	۷	۸	۱۲	۱۵
۳	۶	۸	۱۱	۱۳	۱۳
۴	۸	۹	۹	۱۴	۱۰
۵	۲۱	۱۰	۱۶	۱۵	۵



سؤال ۱ | طراح: شهاب الدین محین: داده‌های زیر را به صورت درست گزارش کنید.

جدول ۱

#	گزارش اولیّه
1	45.253 ± 2.545
2	14555 ± 280
3	$698.65 \times 10^5 \pm 95 \times 10^3$
4	$19.96743 \mu\text{m} \pm 4.6 \text{ nm}$
5	46517.86453 ± 85.00006
6	$0.00045321 \pm 0.00001711 L_{\odot}$

سؤال ۲ | طراح: محمد هادی ستوده:

تلسکوپی با قطر دهانه‌ی $(8.00 \pm 0.03)''$ و نسبت کانونی 6.00 ± 0.15 موجود است. اگر از یک چشمی 25.0000 ± 0.0005 میلی‌متر با میدان دید ظاهری $(52 \pm 4)^\circ$ استفاده کنیم،

الف) میدان دید تلسکوپ به همراه خطا چه قدر خواهد شد؟

ب) مدت زمان عبور ستاره‌ی الدرامین $(\alpha = 21^{\text{h}} 20^{\text{m}} \pm 30^{\text{m}}, \delta = (62.5 \pm 1.5)^\circ)$ از قطر میدان دید چشمی تلسکوپ به همراه خطا چه قدر است؟

سؤال ۳ | طراح: محمد هادی ستوده: جدول ۲، تاریخ مشاهده‌ی دو کمینه‌ی متوالی ستاره‌ی متغیر HSM 1723 را نشان می‌دهد. جدول ۳ نیز، تاریخ مشاهده‌ی دو کمینه‌ی متوالی ستاره‌ی متغیر HSM 4522 را نشان می‌دهد.

جدول ۳ - تاریخ کمینه‌های ستاره‌ی HSM 4522

#	۱	۲
تاریخ	۲ خرداد ۱۳۷۶	۹ آذر ۱۳۷۶

جدول ۲ - تاریخ کمینه‌های ستاره‌ی HSM 1723

#	۱	۲
تاریخ	۱۷ آبان ۱۳۷۶	۱۶ شهریور ۱۳۷۹

الف) دوره‌ی تناوب هر متغیر (بر حسب سال) چه قدر است؟ (هر سال دقیقاً ۳۶۵ روز است).

ب) نسبت دوره‌ی تناوب ستاره‌ی HSM 4522 به ستاره‌ی HSM 1723 چه قدر است؟



سؤال ۴ | طراح: محمدهادی ستوده: جدول ۴ قرمزگرایی و مدول فاصله‌ی چند کهکشان نزدیک را نشان می‌دهد

جدول ۴

#	قرمزگرایی ($\times 10^{-3}$)	مدول فاصله
1	6.00	31.990
2	6.70	32.312
3	8.83	32.899
4	12.30	33.621
5	16.13	34.163
6	17.33	34.287
7	20.00	34.595
8	22.40	34.889

ثابت هابل به همراه خطا بر حسب کیلومتر بر ثانیه بر مگاپارسک چه قدر است؟

سؤال ۵ | طراح: محمدهادی ستوده: جدول ۵ نام و مختصات کنونی چند ستاره را نشان می‌دهد که در طول چند هزار سال آینده، می‌توانند قطب شمال آسمان (NCP) در نظر گرفته شوند.

جدول ۵

#	نام	$\alpha(^{\circ})$	$\delta(^{\circ})$
1	τ هرکول	245.1 ± 0.7	46.27 ± 0.08
2	HIP 111660	339.4 ± 2.1	75.467 ± 0.009
3	ثعبان	211.22 ± 0.04	64.30 ± 0.10
4	۱۳ شلیاق	284.0 ± 0.5	43.97 ± 0.06
5	HIP 62572	192.34 ± 0.08	83 ± 5
6	۲۶ دجابه	300 ± 4	50.2 ± 2.7

میل کنونی قطب جنوب دستگاه دایره البروجی $\delta = -66^{\circ}.56 \pm 0^{\circ}.03$ است.

الف) برای هر داده، زاویه‌ی تمایل محوری زمین (ϵ) را به همراه خطا محاسبه کنید.

ب) با توجه به تمامی داده‌ها، زاویه‌ی تمایل محوری زمین (ϵ) را به همراه خطا گزارش کنید.

سؤال ۶ [طراح: علی زینالی]: سیاره‌ی Kepler-186f به تازگی کشف شده و نشانه‌هایی از حیات بر روی آن دیده می‌شود. پس از انجام آزمایش روی ساکنان این سیاره، داده‌های زیر را برای قد و سن آن‌ها به دست آورده‌ایم.

جدول ۶

#	سن (سال)	قد (متر)
1	21	6.5
2	25	5.8
3	37	4.6
4	41	4.4
5	45	4.2
6	49	4.0
7	57	3.7
8	65	3.5
9	73	3.3
10	85	3.1

برای این داده‌ها سه مدل زیر ارائه شده است:

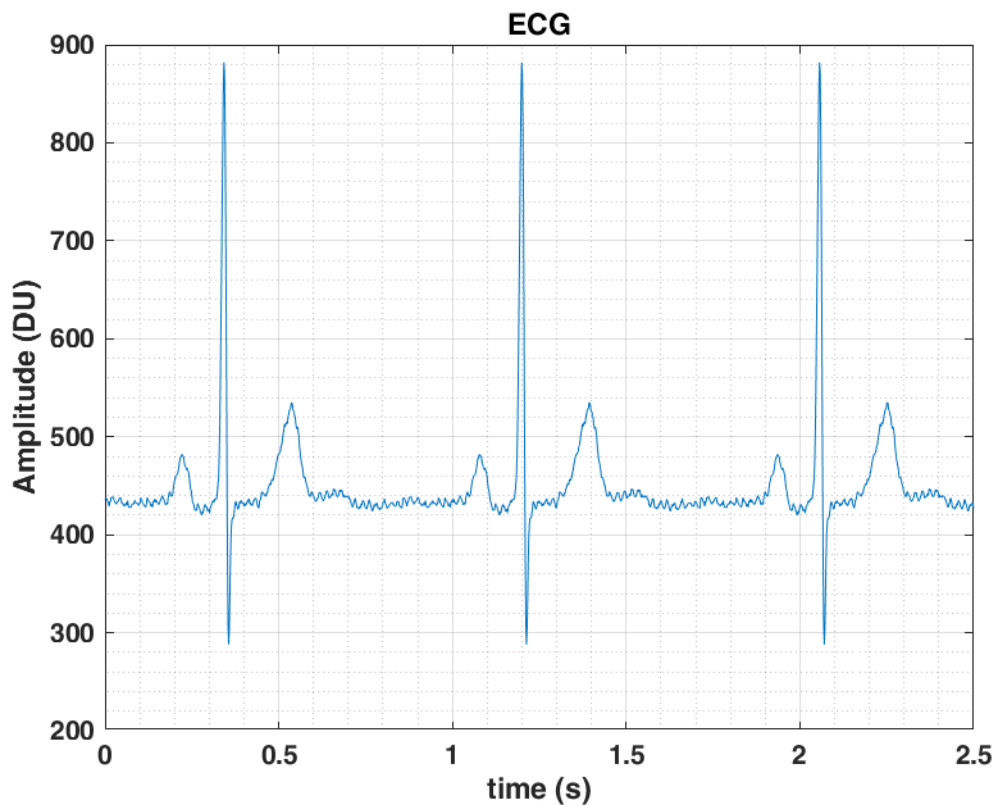
$$M_1: \text{قد} = a \times \text{سن} + b$$

$$M_2: \text{قد} = \frac{a}{\sqrt{\text{سن}}} + b$$

$$M_3: \text{قد} = \frac{a}{\text{سن} + 1} + b$$

با خطی سازی این مدل‌ها و انجام محاسبات لازم، تعیین کنید کدام مدل رابطه‌ی قد و سن این آدم‌فضایی‌ها را بهتر شبیه سازی می‌کند.

سؤال ۷ | طراح: شهاب الدین محین: در نمودار زیر سیگنال قلب یک آدم فضایی بیرون از منظومه شمسی داده شده است.



شکل ۱

الف) فاصله‌ی بین دو بیشینه‌ی سیگنال را به همراه خطا گزارش کنید.

ب) فرکانس متناظر با پاسخ قسمت الف را به همراه خطا گزارش کنید.

ج) ضربان قلب این فرد را بر حسب تپش بر دقیقه (bpm) به همراه خطا گزارش کنید.

د) اگر ضربان قلب واقعی این فرد $HR = 71 \text{ bpm}$ و فاقد خطا باشد، سرعت نسبی فرد را نسبت به ناظر زمینی به همراه خطا گزارش کنید. فرض کنید سرعت انتقال سیگنال برابر با سرعت نور است.



سؤال ۸ [طراح: شهاب الدین محین]: در جدول زیر تعداد ستاره‌های قابل مشاهده در زاویه فضایی $\Omega = \frac{\pi}{4}$ sr در جهتی دلخواه بر حسب فاصله داده شده است. نمودار این داده‌ها را در کاغذ مناسب رسم نمایید.

جدول ۷

#	d (pc)	N
1	1.46	1
2	2.15	5
3	4.37	19
4	5.82	67
5	8.34	421
6	10.10	1474
7	13.79	15374

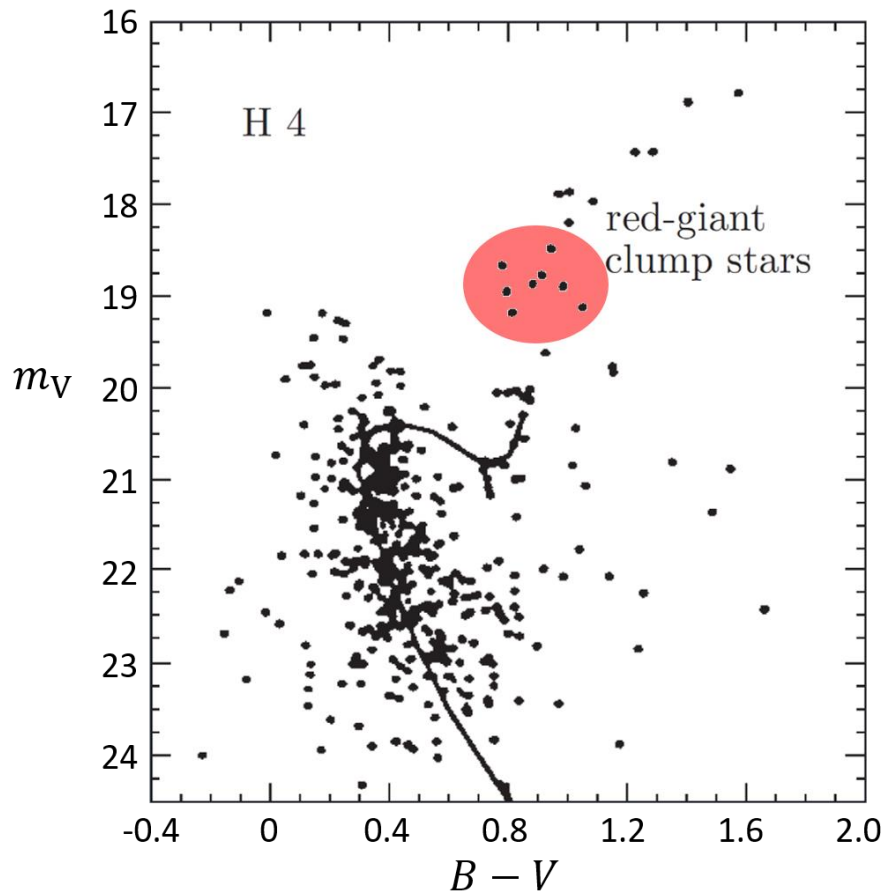
سؤال ۹ [طراح: شهاب الدین محین]: در یک سایت راداری مربوط به پایش اطلاعات ماهواره‌ای، مختصات افقی تعدادی از ماهواره‌های بالای افق مطابق جدول زیر می‌باشد. نمودار قطبی آن را رسم نمایید.

جدول ۸

#	ارتفاع (a)	سمت (A)
1	$25^\circ 35.421'$	$173^\circ 42.233'$
2	$47^\circ 19.373'$	$214^\circ 26.220'$
3	$75^\circ 26.194'$	$286^\circ 37.270'$
4	$71^\circ 37.218'$	$355^\circ 40.138'$
5	$66^\circ 29.773'$	$74^\circ 13.115'$
6	$38^\circ 45.912'$	$113^\circ 45.598'$

سؤال ۱۰ | طراح: محمد هادی ستوده:

شکل زیر نمودار H-R خوشه‌ی ستاره‌ای H4 را نشان می‌دهد که در کهکشان کوتوله‌ی بیضی‌گون کوره قرار گرفته است. بر روی نمودار ناحیه‌ی موسوم به توده‌ی غول سرخ^۱ مشخص شده است. در این ناحیه ستارگان کم‌جرمی که در حال هلیوم‌سوزی در هسته اند و فلزیت بالایی دارند، قرار می‌گیرند و تقریباً ویژگی‌های یکسانی پیدا می‌کنند.



شکل ۲ - نمودار H-R خوشه‌ی H4

با توجه به نمودار به قسمت‌های زیر پاسخ دهید. در تمامی بخش‌ها کمیت نهایی را به همراه خطا گزارش کنید.

الف) $B - V$ و قدر ظاهری یک ستاره‌ی نوعی توده‌ی غول سرخ چه قدر است؟

ب) با فرض این که فاصله‌ی خوشه‌ی H4 از ما ۱۳۸ ± ۸ کیلوپارسک است، قدر مطلق یک ستاره‌ی نوعی توده‌ی غول سرخ را تعیین کنید.

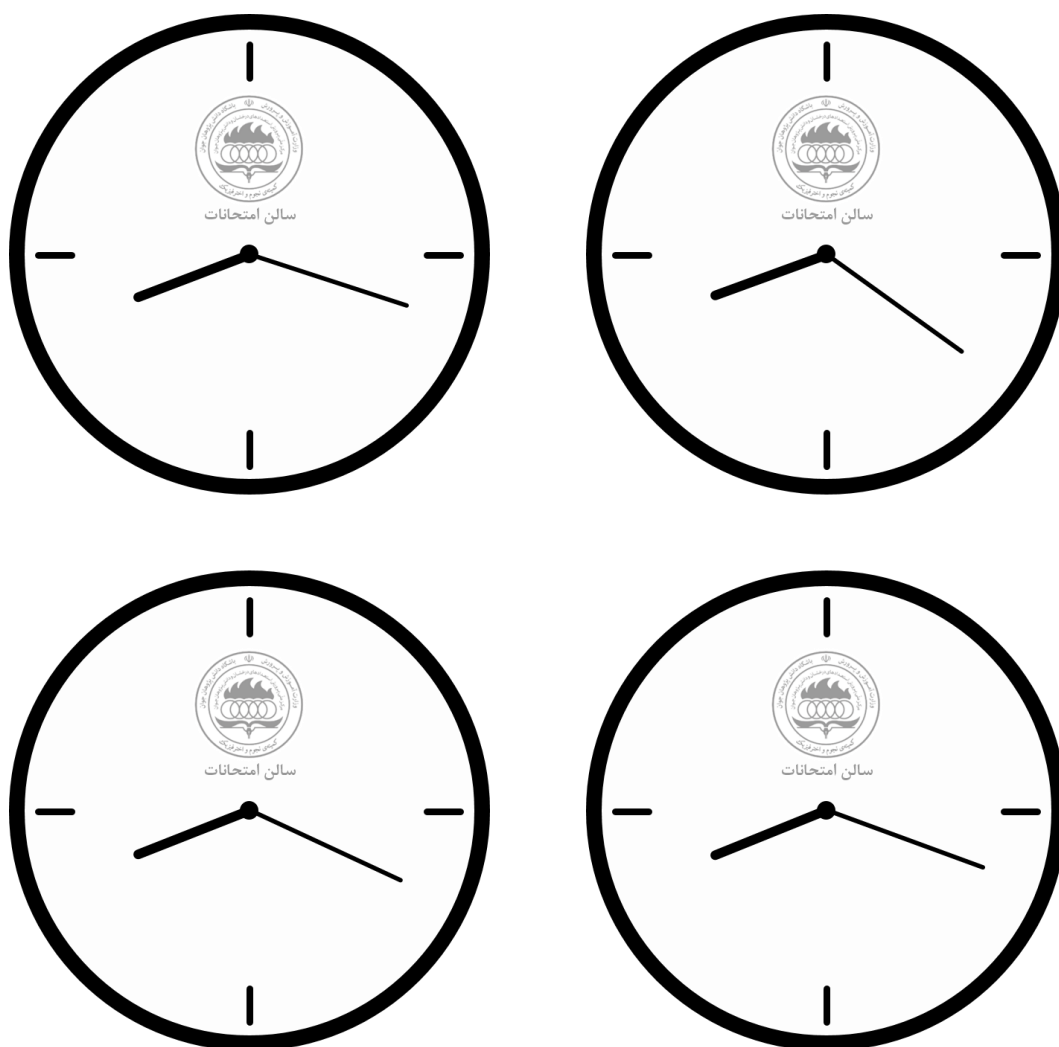
ج) شعاع یک ستاره‌ی نوعی توده‌ی غول سرخ چه قدر است؟ رابطه‌ی بایستروس^۲ میان $B - V$ و دما وجود دارد:

$$T = 4600 \text{ K} \left(\frac{1}{0.92(B - V) + 1.70} + \frac{1}{0.92(B - V) + 0.62} \right)$$

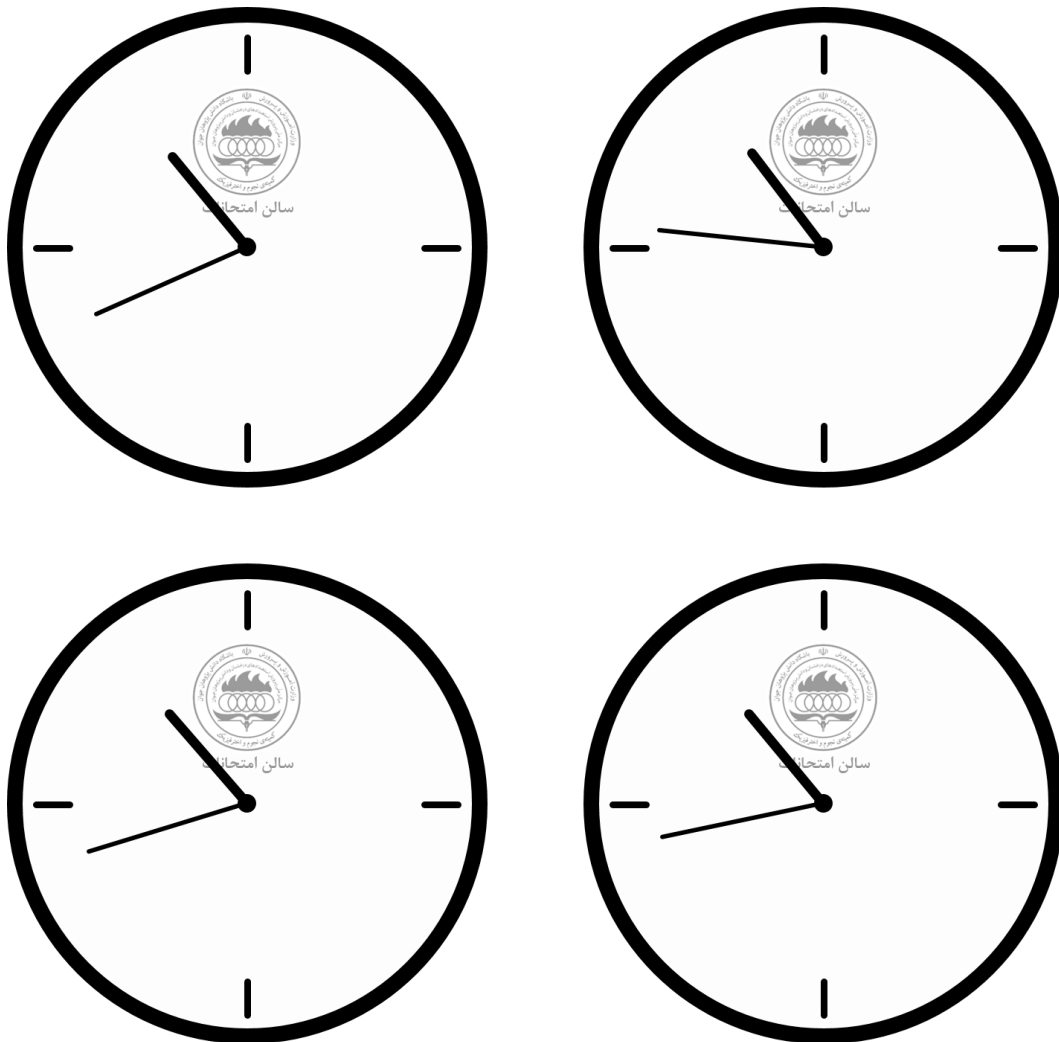
^۱ Red-giant Clump

^۲ Ballesteros' Formula

سؤال ۱۱ [طراح: محمد‌هادی ستوده]: فرض کنید در پایان دوره‌ی تابستانه، شما موفق به کسب مدال طلا شده‌اید و در اوایل اسفند ماه ۱۳۹۷ در جلسه‌ی آزمون مفاهیم پایه‌ی تحلیل داده در دوره‌ی انتخابی تیم در باشگاه دانش‌پژوهان جوان هستید. برای نشان دادن زمان، سالن امتحانات مجهز به ۴ ساعت شده است. شما در دو لحظه‌ی متفاوت، به هر ۴ ساعت نگاه کرده و تصاویر زیر را مشاهده می‌کنید.



شکل ۳ - تصویر مشاهده شده از ساعت‌ها در اولین لحظه



شکل ۴ - تصویر مشاهده شده از ساعت‌ها در دومین لحظه

در تمامی بخش‌ها کمیت نهایی را به همراه خطا گزارش کنید.

الف) در هر لحظه، ساعت چند است؟

ب) از لحظه‌ی اول تا لحظه‌ی دوم، چه فاصله‌ی زمانی (بر حسب دقیقه) سپری شده است؟



سؤال ۱۲ [طراح: علی زینالی]: کاوشگر کنجکاوی^۱ هنگام فرود بر سیاره‌ی مریخ در تاریخ ۱۶ مرداد ۱۳۹۱، داده‌های زیر را از چگالی هوای اطراف خود بر حسب زمان گزارش داده است.

جدول ۹

#	زمان (0.1s)	چگالی (واحد قراردادی)
1	0.39	22.0
2	1.18	4.43
3	1.97	24.3
4	3.54	25.7
5	3.93	26.5
6	5.51	27.4
7	5.90	27.6
8	7.08	64.8
9	7.86	28.9
10	8.65	28.8
11	9.83	29.5

الف) انحراف معیار را برای مقادیر چگالی حساب کنید.

ب) نمودار چگالی بر حسب زمان را رسم کنید.

ج) داده‌های پرت را مشخص کنید.

د) انحراف معیار داده‌های تمیز شده (داده‌های حاصل از حذف داده‌های پرت) را به دست آورید.

جدول ۱۰ - بازه‌های هیستوگرام

#	بازه
1	[1650,1700)
2	[1700,1750)
3	[1750,1800)
4	[1800,1850)
5	[1850,1900)
6	[1900,1950]

سؤال ۱۳ [طراح: شهاب الدین محین]: برای یک CCD با تعداد پیکسل‌های

4096×4096 نمودار فراوانی نسبی تجمعی شماره‌های تصاویر مطابق شکل

ارائه شده در پیوست است (طول بازه = ۱).

الف) با فرض این که هیستوگرام را برای این CCD با طول بازه‌ی ۱ رسم کرده‌ایم، بیشینه‌ی نمودار دقیقاً در چه شماره‌ای اتفاق می‌افتد؟ روش خود را در یک خط توضیح دهید.

ب) برای این داده‌ها، هیستوگرام را طبق بازه‌های جدول مقابل رسم نمایید.



سؤال ۱۴ | طراح: علی زینالی: داده‌های جدول زیر را در نظر بگیرید.

جدول ۱۱

#	x	y
1	1	8.30×10^0
2	3	5.24×10^1
3	5	3.86×10^2
4	9	2.11×10^4
5	10	5.73×10^4
6	13	1.15×10^6
7	14	3.13×10^6
8	15	8.50×10^6
9	16	2.31×10^7
10	18	1.71×10^8

فرض کنید که این داده‌ها از رابطه‌ی $y = ae^x + be^{-x}$ پیروی می‌کنند.

الف) با استفاده از روش کمترین مربعات (کمینه کردن خطا^۱) برای همین رابطه، روابطی برای a و b به دست آورید.

ب) با توجه به قسمت الف، مقادیر a و b را به دست آورید.

ج) میزان خطای روش کمترین مربعات را با توجه به a و b به دست آمده به دست آورید.

سؤال ۱۵ | طراح: علی زینالی: با توجه به سؤال ۱۴، به قسمت‌های زیر پاسخ دهید.

الف) رابطه داده شده را خطی کنید.

ب) با توجه به قسمت الف، مقادیر a و b را به دست آورید.

ج) مقدار خطای روش کمترین مربعات را برای عبارت خطی شده و با استفاده از شیب و عرض از مبدأ حساب شده محاسبه کنید.



روابط برازش خطّ راست

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{x}$$

$$d_i = y_i - (A + Bx_i)$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N y_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad A = \bar{y} - B\bar{x}$$

$$(\Delta B)^2 \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

$$(\Delta A)^2 \approx \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \right) \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

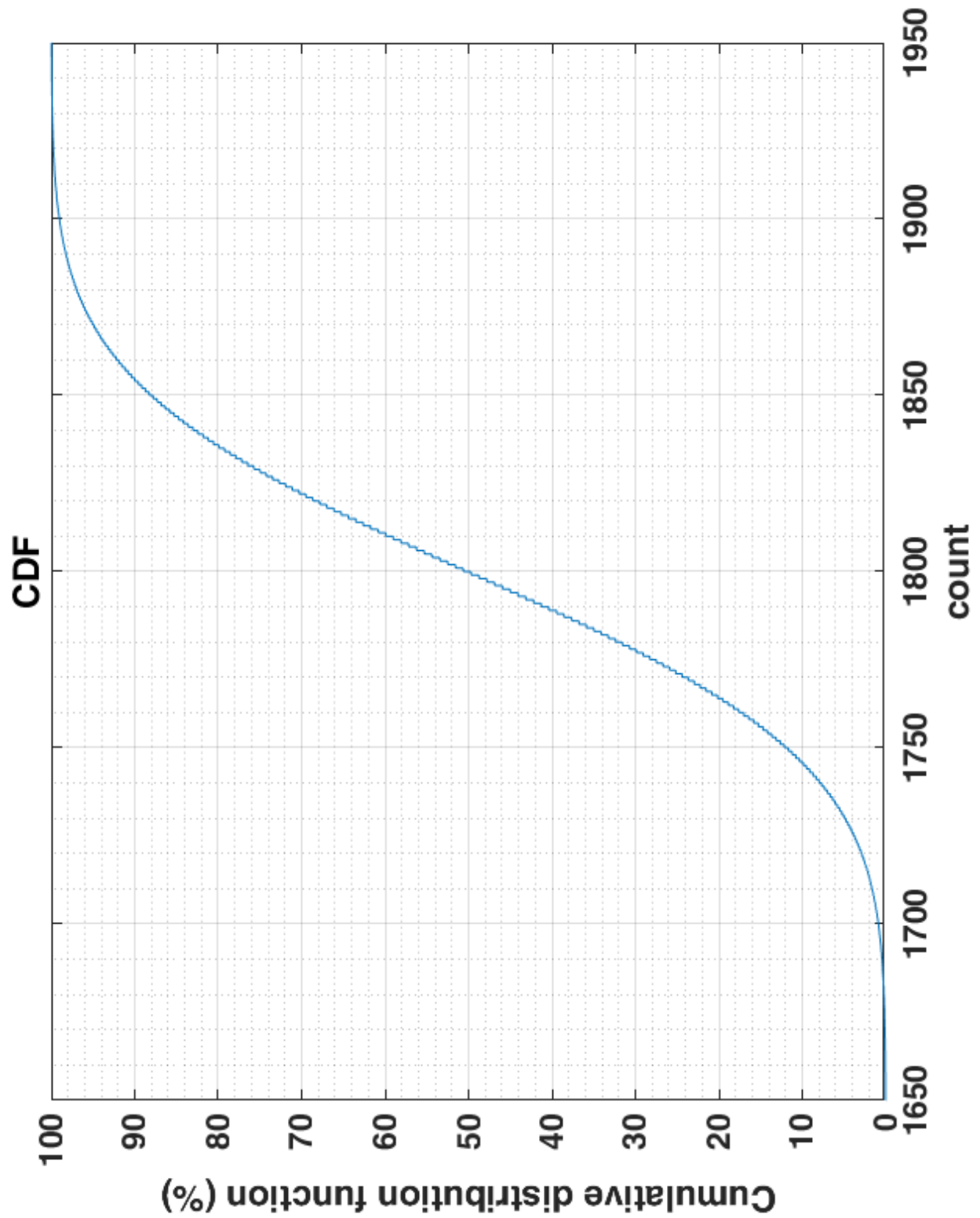
$$\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x}$$

$$d_i = y_i - Bx_i$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

$$(\Delta B)^2 \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 1}$$

نمودار سؤال ۱۳





آزمون مفاهیم پایه‌ی تحلیل داده

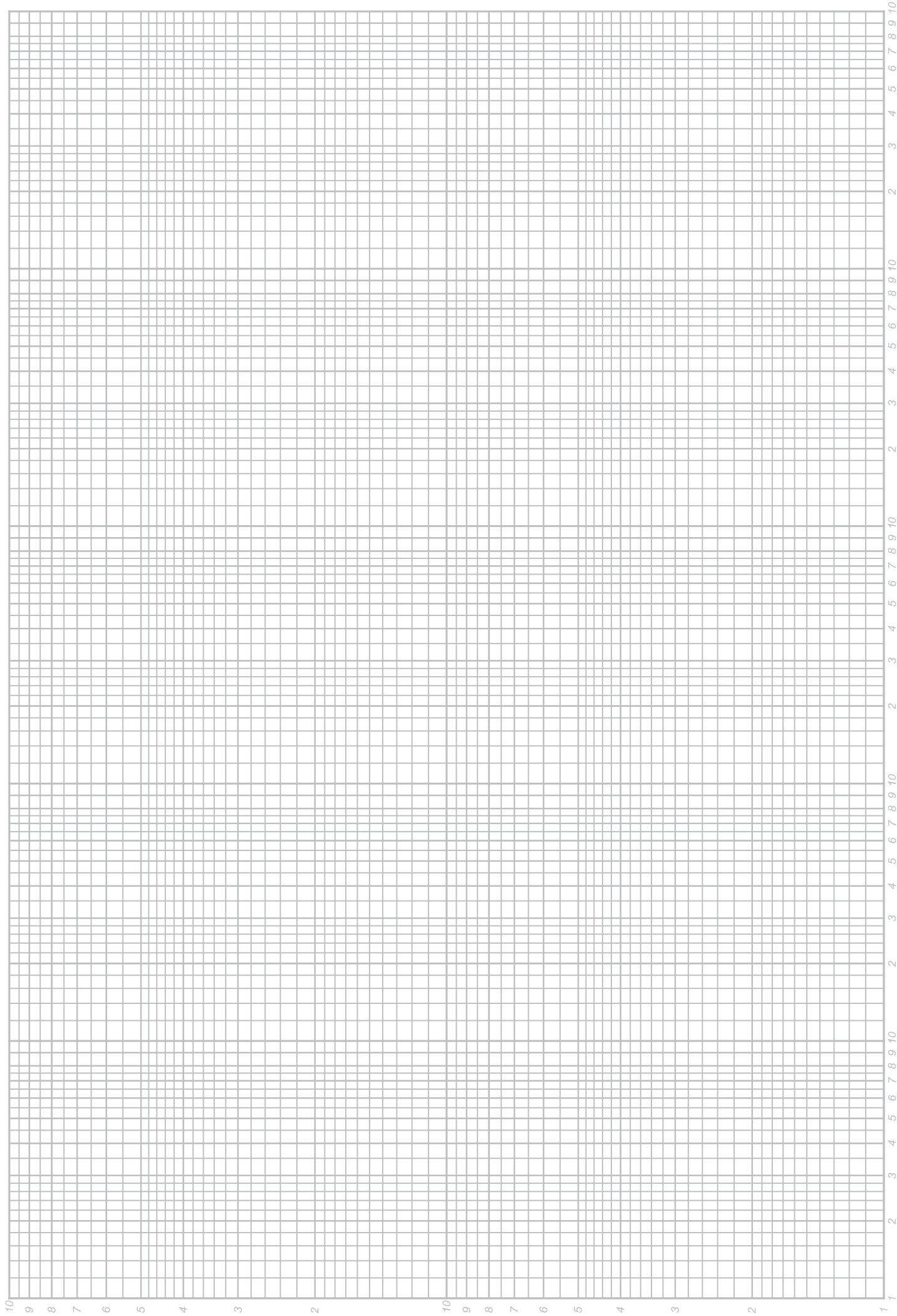
راهنمایی برای سؤال ۵

✓ بعد کنونی قطب جنوب دستگاه دایره البروجی دقیقاً معلوم است.

✓ روابط محاسبه‌ی میانگین و خطا در اندازه‌گیری مرکب:

$$X \pm \sigma \approx \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2} x_i}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}} \pm \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

σ_i خطای داده‌ی i ام است.





وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»



چهاردهمین دوره‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک
آزمون‌های پایانی

آزمون تحلیل داده ۱

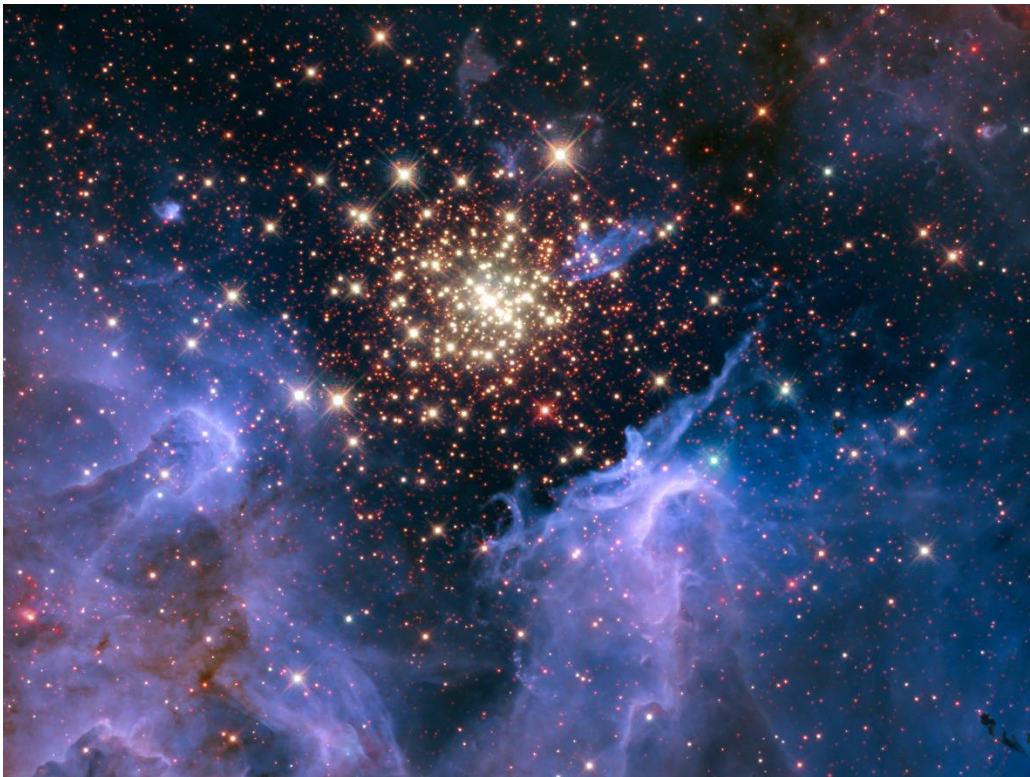
(۱۲ شهریور ۱۳۹۷ - ساعت ۸:۰۰ تا ۱۲:۳۰)

توجه: بارم سؤالات متفاوت است.

این صفحه عمدتاً خالی گذاشته شده است.

گاز و غبار در منظومه‌ی فراخورشیدی (۱۴۰ نمره) [طراح: روزبه قادری و محمدهادی ستوده]

در کهکشان‌هایی که آهنگ ستاره‌زایی زیادی دارند، اکثر ستارگان به صورت گروهی در سحابی‌های ستاره‌زا^۱ متولد می‌شوند. هر کدام از ستارگان در هنگام تولد، بخشی از ماده‌ی موجود در سحابی را به سمت خود جذب می‌کند. در نتیجه حول هر ستاره، ابری متقارن از جنس گاز و غبار شکل می‌گیرد.



شکل ۱ - سحابی ستاره‌زای NGC3603 (تلسکوپ فضایی هابل)

به تازگی با نورسنجی منظومه‌ی جوان HDBKF_S_GB_42، ۱۰ سیاره‌ی نسبتاً بزرگ کشف شده است که در مدارهای دایره‌ای به دور ستاره‌ی مرکزی می‌گردند. این سیارات صفحه‌ی مداری مشترکی دارند که زاویه‌ی تمایل آن بسیار نزدیک به 90° است. هم‌چنین تحلیل طیفی نشان می‌دهد که ابری با پروفایل چگالی

$$\rho(r) = \rho_0 \left(\frac{r}{R_*} \right)^{-2} \left(\frac{r}{R_*} - 1 \right)^\alpha \quad r > R_*$$

در این منظومه قرار گرفته است. r فاصله از ستاره‌ی مرکزی و $R_* = 3/5 R_\odot$ شعاع ستاره‌ی مرکزی است. ضخامت اپتیکی ابر به قدری کم است که ستاره‌ی مرکزی و سیاره‌های منظومه قابل مشاهده هستند.

تصاویر پیوست، منحنی نوری سیاره‌های منظومه‌ی HDBKF_S_GB_42 هستند. مدت زمان عبور^۱ سیاره‌های فراخورشیدی نسبت به دوره‌ی تناوب آن‌ها اندک است؛ پس امکان نمایش دو عبور متوالی در منحنی‌های نوری وجود نداشته است. جدول ۱ فاصله‌ی زمانی بین دو کمینه‌ی نوری متوالی (Δt) را برای هر سیاره نشان می‌دهد.

جدول ۱

#	Δt (روز)
1	130.0
2	466.6
3	944.4
4	1490.6
5	2226.5
6	2989.8
7	3605.9
8	4372.0
9	5747.1
10	8031.8

سؤال ۱: نمودار سرعت مداری بر حسب شعاع مداری سیاره‌ها را به صورت تکه‌خطی رسم کنید.

سؤال ۲: نمودار جرم داخل مدار هر سیاره بر حسب شعاع مداری را به صورت تکه‌خطی رسم کنید. با توجه به نمودار، جرم ستاره‌ی مرکزی کدام یک از مقادیر زیر می‌تواند باشد؟

$6/00 M_{\odot}$	$4/00 M_{\odot}$	$2/00 M_{\odot}$
$12/00 M_{\odot}$	$10/00 M_{\odot}$	$8/00 M_{\odot}$

سؤال ۳: شعاع و جرم ابر را از روی نمودار سؤال ۲ برآورد کنید.

سؤال ۴: با برازش خط، ρ_0 و α را به همراه خطا گزارش کنید.

سؤال ۵: مطالعه‌ای دیگر بر روی این منظومه نشان می‌دهد که توزیع جرمی ابر، تا شعاع $(10/8 \pm 0/3)$ AU ادامه دارد. بر این اساس، جرم ابر را به همراه خطا محاسبه کنید.

^۱ Transit Duration (به مدت زمانی گفته می‌شود که سیاره از مقابل ستاره‌ی مرکزی گذر می‌کند).



گروهی از دانشمندان سیاره‌شناس، قصد بررسی منظومه‌ی HDBKF_S_GB_42 را دارند. این دانشمندان ضمن بهره‌گیری از منحنی‌های نوری پیوست شده، با بررسی منحنی سرعت شعاعی ستاره‌ی مرکزی، جرم سیاره‌ها را محاسبه کرده‌اند (جدول ۲).

جدول ۲ - جرم سیاره‌های منظومه‌ی HDBKF_S_GB_42

#	جرم سیاره (M_J)
1	0.518
2	0.429
3	0.471
4	0.553
5	0.466
6	0.508
7	0.711
8	1.132
9	1.184
10	1.289

سؤال ۶: با استفاده از منحنی‌های نوری، شعاع هر سیاره را به دست آورید.

همه‌ی سیاره‌های این منظومه جزء سیارات سنگین هستند. برای این سیارات رابطه‌ی $M = AR^B$ بین جرم و شعاع وجود دارد.

سؤال ۷: با برازش خط، A و B را محاسبه کنید.

سؤال ۸: با فرض این که چگالی جرمی هر سیاره مقدار ثابتی است، کدام سیاره یا سیاره‌ها شرایط مناسبی برای پیدایش حیات دارند؟



تحوّل و سرانجام ستارگان تپنده (۱۰۰ نمره) [طراح: علی زینالی]

ستارگان SH_00، گونه‌ای از ستارگان تپنده هستند که رفتارهای جالبی از خود نشان می‌دهند. جدول ۳، جرم و درخشندگی ۱۰ نمونه از این ستاره‌ها را نشان می‌دهد.

جدول ۳ - جرم و درخشندگی ستارگان SH_00

$L (L_{\odot})$	$M (M_{\odot})$	#
0.90	0.8	1
2.05	1.1	2
3.16	1.3	3
5.43	1.6	4
12.43	2.2	5
15.58	2.4	6
23.27	2.8	7
44.72	3.6	8
55.07	3.9	9
75.35	4.4	10

سؤال ۹: نمودار مربوط به جدول ۳ را در کاغذ لگاریتمی رسم کنید.

سؤال ۱۰: ثابت رابطه‌ی جرم-درخشندگی ستارگان SH_00 را که به فرم $L = CM^{\alpha}$ است بیابید. منحنی برازش شده را روی نمودار سؤال ۹ نشان دهید.

ستاره‌ی SH_00_12442 یکی از ستارگان SH_00 است که در فاصله‌ی ۳/۴ کیلوپارسکی از ما قرار دارد و شار دریافتی آن $F = 3/16 \times 10^{-14} \text{ W/m}^2$ اندازه‌گیری شده است.

سؤال ۱۱: جرم و درخشندگی ستاره‌ی SH_00_12442 چه قدر است؟

مدل‌سازی‌ها نشان می‌دهند که ستارگان SH_00 پس از شکل‌گیری، دو مرحله‌ی تحول و مرگ را سپری می‌کنند.

مرحله‌ی تحول

مرحله‌ی تحول که بخش اصلی زندگی ستارگان SH_00 محسوب می‌شود، شامل چهار دوره است. در ابتدای دوره‌ی اول، ستاره به طور اتفاقی در یکی از حالت‌های نوسانی سکون، انبساط یا انقباض قرار گرفته و نوسان می‌کند. پس از پایان هر دوره ممکن است حالت نوسانی ستاره تغییر کند. نمودار زیر، نمونه‌ای از مرحله‌ی تحول یک ستاره را نشان می‌دهد.

انقباض ← سکون ← سکون ← انبساط

ستارگان SH_00 در سه دسته‌ی کلی طبقه‌بندی می‌شوند. در جدول‌های ۴ تا ۶، مشخص شده است که در پایان هر دوره‌ی نوسانی، احتمال گذار از حالت A به حالت B برای هر دسته چه قدر است.

جدول ۵ - احتمال گذار برای دسته‌ی دوم

	B / A		
	انقباض	انبساط	سکون
سکون	0.3	0.6	0.1
انبساط	0.4	0.4	0.2
انقباض	0.3	0.4	0.3

جدول ۴ - احتمال گذار برای دسته‌ی اول

	B / A		
	انقباض	انبساط	سکون
سکون	0.5	0.3	0.2
انبساط	0.4	0.2	0.4
انقباض	0.1	0.3	0.6

جدول ۶ - احتمال گذار برای دسته‌ی سوم

	B / A		
	انقباض	انبساط	سکون
سکون	0.3	0.3	0.4
انبساط	0.3	0.4	0.3
انقباض	0.4	0.3	0.3



برای مثال، هنگامی که ستارگان دسته‌ی دوم در حالت انبساط قرار دارند، با احتمال $0/2$ در دوره‌ی نوسانی بعدی به حالت سکون می‌روند. یا مثلاً وقتی ستارگان دسته اول در حالت سکون هستند، با احتمال $0/5$ در دوره‌ی نوسانی بعدی به حالت انقباض می‌روند و با احتمال $0/2$ در حالت سکون باقی می‌مانند.

سؤال ۱۲: ستاره‌ی SH_00_12442 دوره‌های نوسانی زیر را در مرحله‌ی تحول سپری کرده است.

انبساط \leftarrow انقباض \leftarrow انبساط \leftarrow سکون

(الف) اگر این ستاره جزء دسته‌ی اول باشد، احتمال رخداد الگوی نوسانی بالا چه قدر است؟

(ب) اگر این ستاره جزء دسته‌ی دوم باشد، احتمال رخداد الگوی نوسانی بالا چه قدر است؟

(ج) اگر این ستاره جزء دسته‌ی سوم باشد، احتمال رخداد الگوی نوسانی بالا چه قدر است؟

راهنمایی: در گذار از حالت نوسانی A به حالت نوسانی B ، احتمال گذار تنها به A وابسته است.

مرحله‌ی مرگ

به طور کلی، ستارگان در پایان عمر خود به سیاه‌چاله، ستاره‌ی نوترونی و یا کوتوله‌ی سفید تبدیل می‌شوند. سرانجام ستارگان SH_00، وابسته به جرم و دسته‌ی ستاره است. در جدول‌های ۷ تا ۹، احتمال وقوع هر کدام از حالت‌های پایانی برای دسته‌های مختلف داده شده است. M جرم ستاره بر حسب جرم خورشید است.

جدول ۸ - احتمال وقوع حالت‌های پایانی برای دسته‌ی دوم

احتمال وقوع	حالت مرگ
$\frac{2M}{2M + M^2 + \sqrt{M}}$	سیاه‌چاله
$\frac{M^2}{2M + M^2 + \sqrt{M}}$	ستاره‌ی نوترونی
$\frac{\sqrt{M}}{2M + M^2 + \sqrt{M}}$	کوتوله‌ی سفید

جدول ۷ - احتمال وقوع حالت‌های پایانی برای دسته‌ی اول

احتمال وقوع	حالت مرگ
$\frac{4M^2}{4M^2 + 3M + M}$	سیاه‌چاله
$\frac{3M}{4M^2 + 3M + M}$	ستاره‌ی نوترونی
$\frac{M}{4M^2 + 3M + M}$	کوتوله‌ی سفید



جدول ۹ - احتمال وقوع حالت‌های پایانی برای دسته‌ی سوم

حالت مرگ	احتمال وقوع
سیاه‌چاله	۰/۳
ستاره‌ی نوترونی	۰/۳
کوتوله‌ی سفید	۰/۴

تا کنون ۱۲۷۳۷۹ ستاره‌ی SH_00 کشف شده است که از این میان، ۵۱۶۲۹ ستاره در دسته‌ی اول و ۴۸۹۳۲ ستاره در دسته‌ی دوم قرار داشته‌اند.

سؤال ۱۳: با توجه به مشاهدات انجام شده برای چهار دوره‌ی نوسانی ستاره‌ی SH_00_12442.

(الف) احتمال این که این ستاره در پایان عمر خود به سیاه‌چاله تبدیل شود چه قدر است؟

(ب) احتمال این که این ستاره در پایان عمر خود به ستاره‌ی نوترونی تبدیل شود چه قدر است؟

راهنمایی ۱: برای حل قسمت الف طبق مراحل زیر عمل کنید:

(۱) بر اساس مشاهدات انجام شده، محاسبه کنید احتمال حضور ستاره در هر دسته (اول، دوم یا سوم) چه قدر است.

(۲) با کمک مقادیر بالا حساب کنید ستاره با چه احتمالی به سیاه‌چاله تبدیل می‌شود. مثلاً ستاره با احتمال خاصی در دسته‌ی اول

قرار می‌گیرد و سپس با توجه به جدول ۷ با احتمالی دیگر به سیاه‌چاله تبدیل می‌شود و ...

راهنمایی ۲: فرض کنید A ، B و C سه پدیده باشند که با یکدیگر اشتراک ندارند و اجتماع آن‌ها همه‌ی حالت‌ها را پوشش می‌دهد.

برای پدیده‌ی Z داریم:

$$P(Z) = P(Z|A)P(A) + P(Z|B)P(B) + P(Z|C)P(C)$$

$$P(Z|X) = P(Z|A, X)P(A|X) + P(Z|B, X)P(B|X) + P(Z|C, X)P(C|X)$$

$P(Z|A, X)$ یعنی احتمال رخ دادن Z به شرط رخ دادن A و X

سؤال ۱۴: با توجه به تمامی نتایج به دست آمده، پیش‌بینی شما از سرانجام ستاره‌ی SH_00_12442 کدام مورد

است؟

کوتوله‌ی سفید

ستاره‌ی نوترونی

سیاه‌چاله



ثوابت فیزیکی و نجومی

مقدار	کمیت
$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$	G ثابت جهانی گرانش
$3.09 \times 10^{16} \text{ m}$	pc پارسک
$1.50 \times 10^{11} \text{ m}$	AU واحد نجومی
$3.85 \times 10^{26} \text{ W}$	L_{\odot} درخشندگی خورشید
$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$	M_{\odot} جرم خورشید
$6.96 \times 10^8 \text{ m}$	R_{\odot} شعاع خورشید
$5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$	M_{\oplus} جرم زمین
$1.90 \times 10^{27} \text{ kg}$	M_J جرم مشتری
86400 s	شبانروز خورشیدی

روابط برازش خطّ راست

$$y = Bx$$

$$d_i = y_i - Bx_i$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

$$(\Delta B)^2 \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-1}$$

$$y = A + Bx$$

$$d_i = y_i - (A + Bx_i)$$

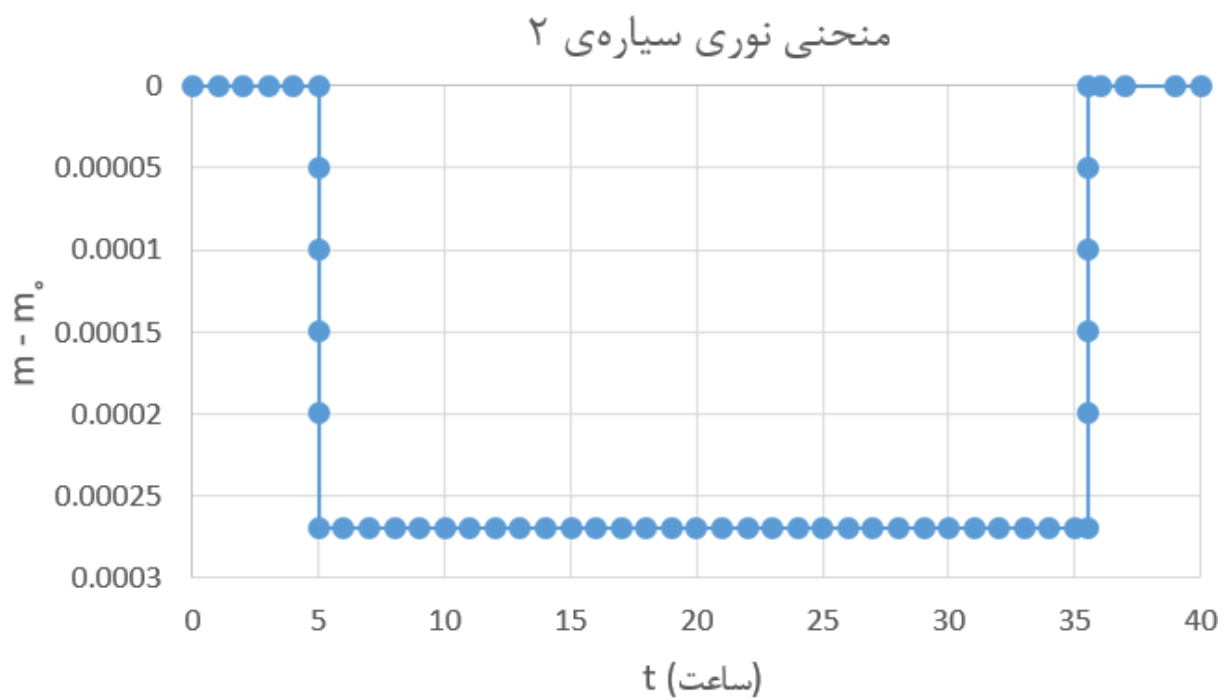
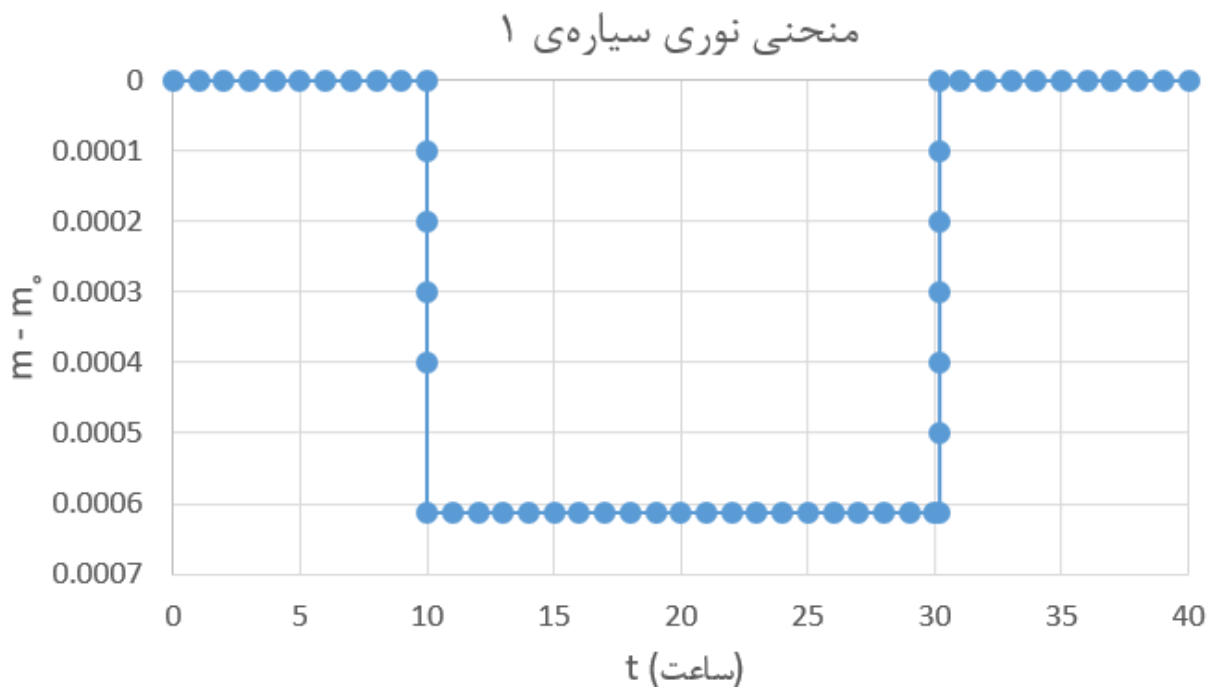
$$B = \frac{\sum_{i=1}^N y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad A = \bar{y} - B\bar{x}$$

$$(\Delta B)^2 \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-2}$$

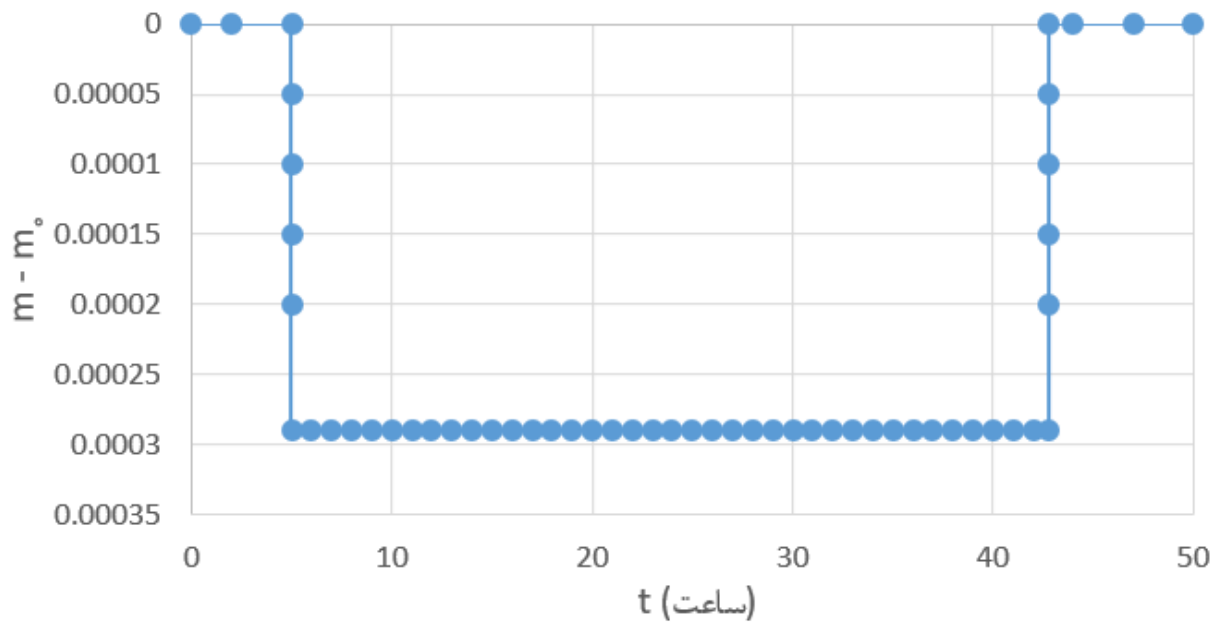
$$(\Delta A)^2 \approx \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \right) \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-2}$$

منحنی‌های نوری مربوط به بخش اول

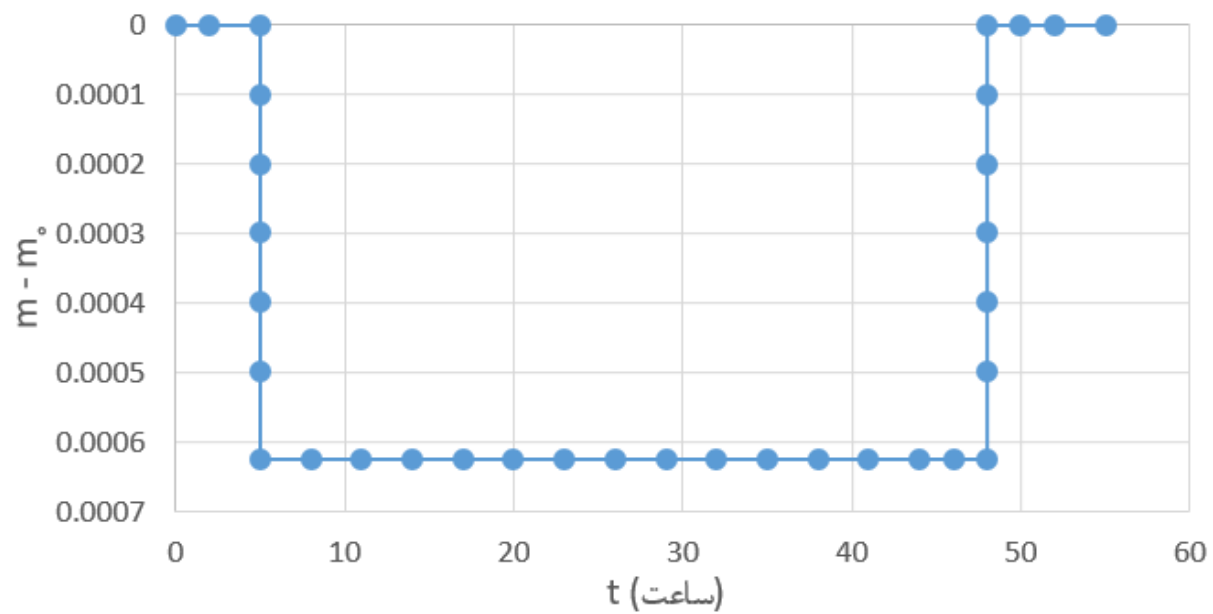
m_0 قدر ظاهری ستاره‌ی مرکزی منظومه‌ی HDBKF_S_GB_42 است.



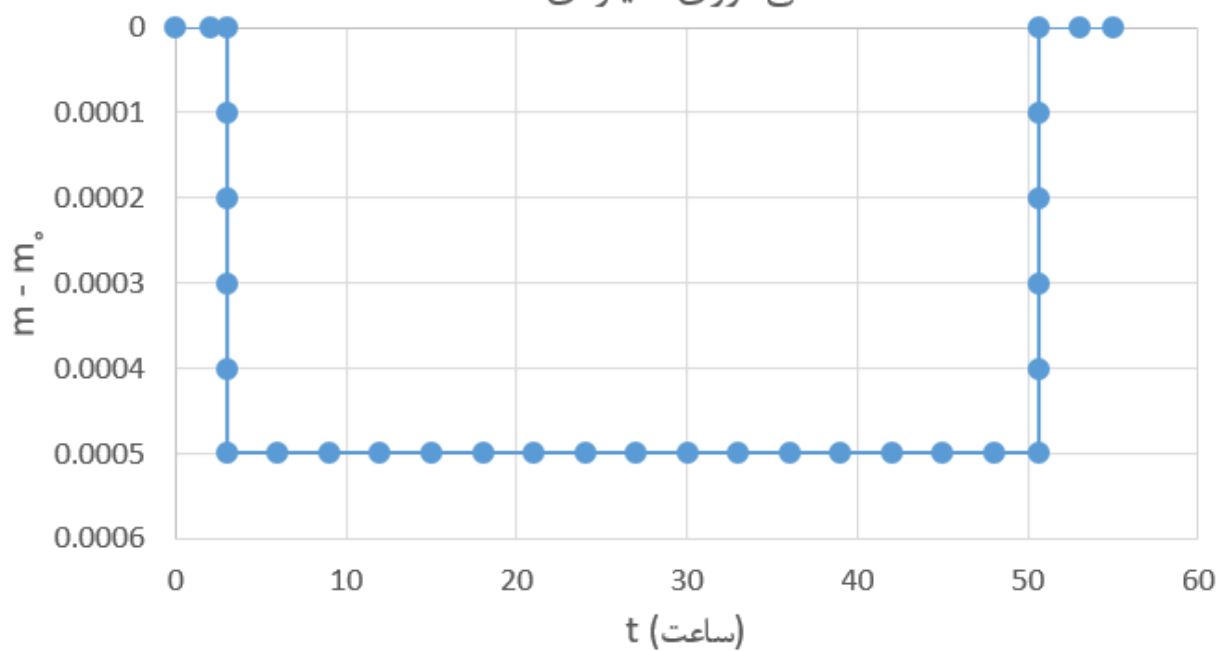
منحنی نوری سیاره ی ۳



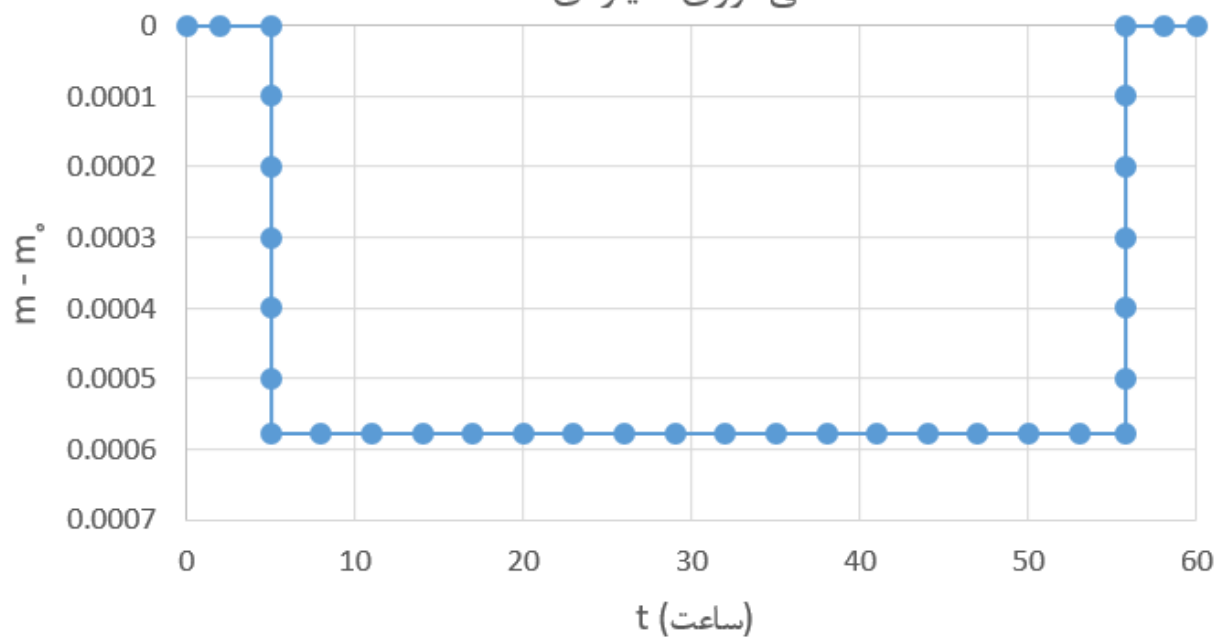
منحنی نوری سیاره ی ۴



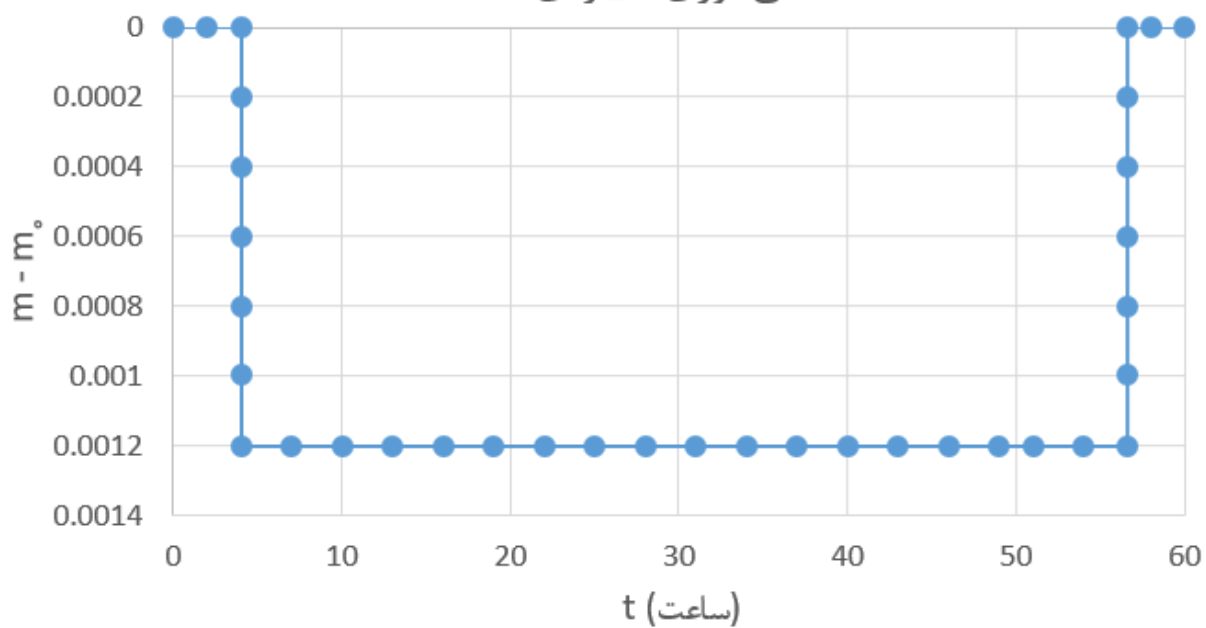
منحنی نوری سیاره ی ۵



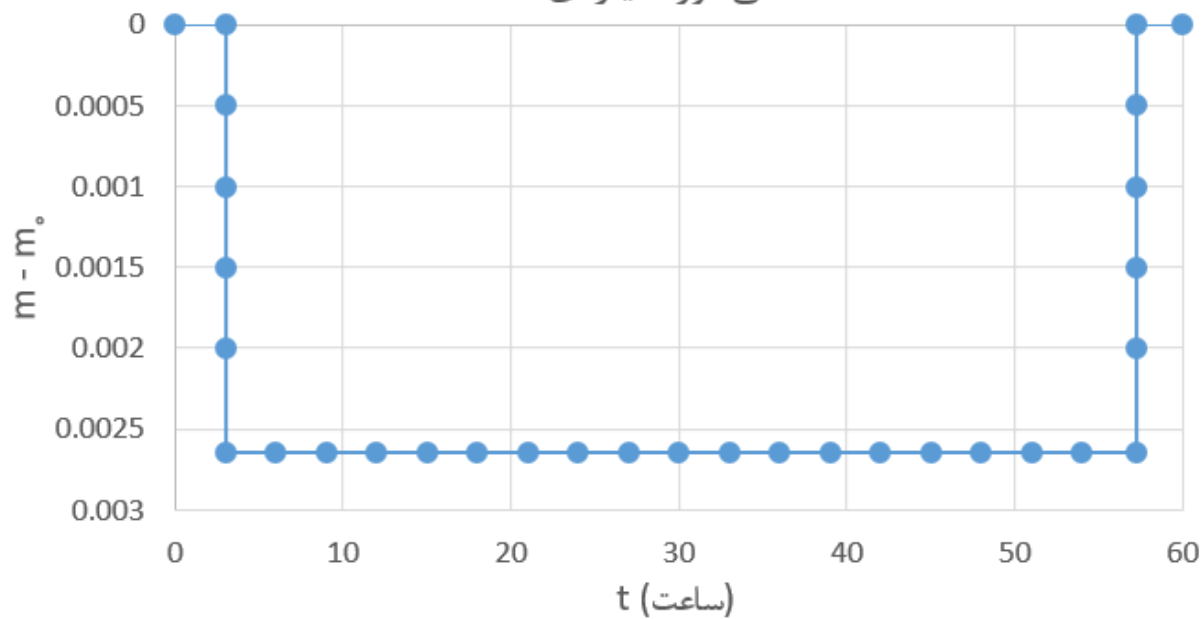
منحنی نوری سیاره ی ۶

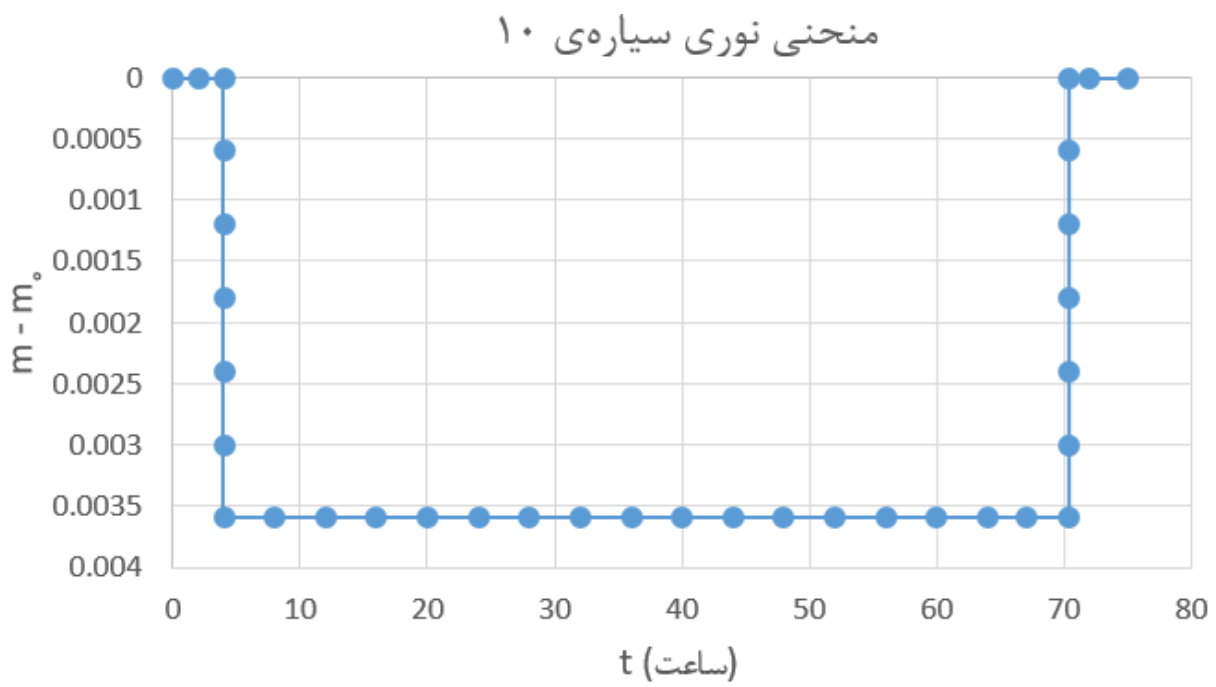
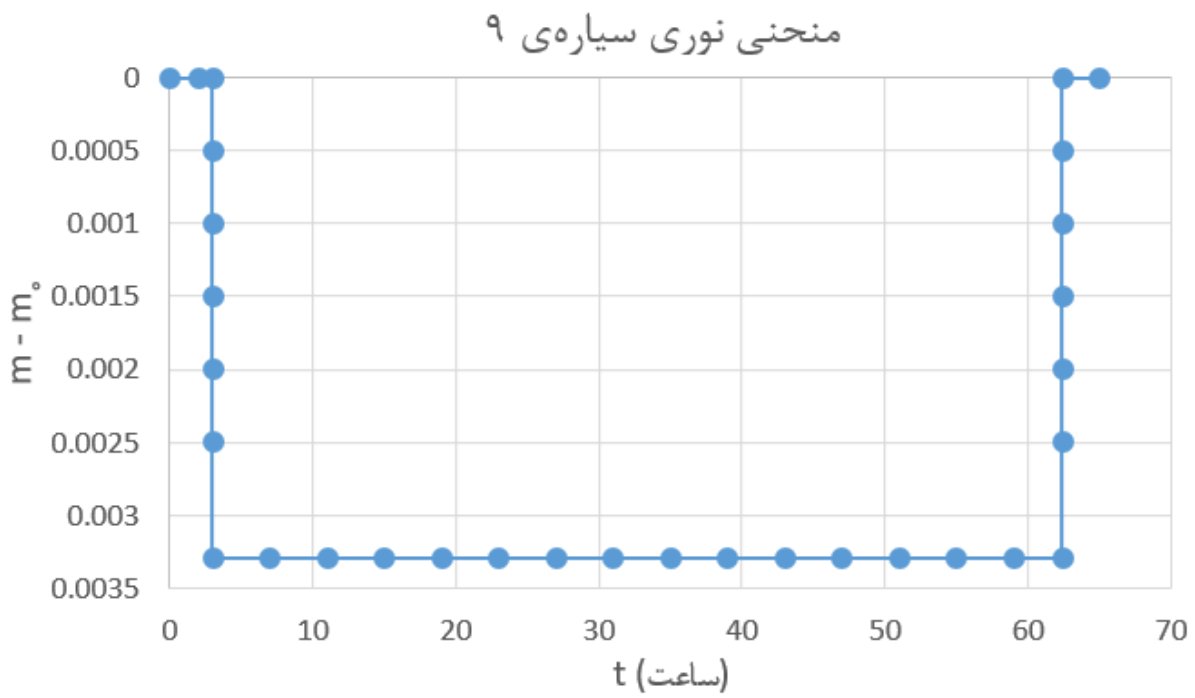


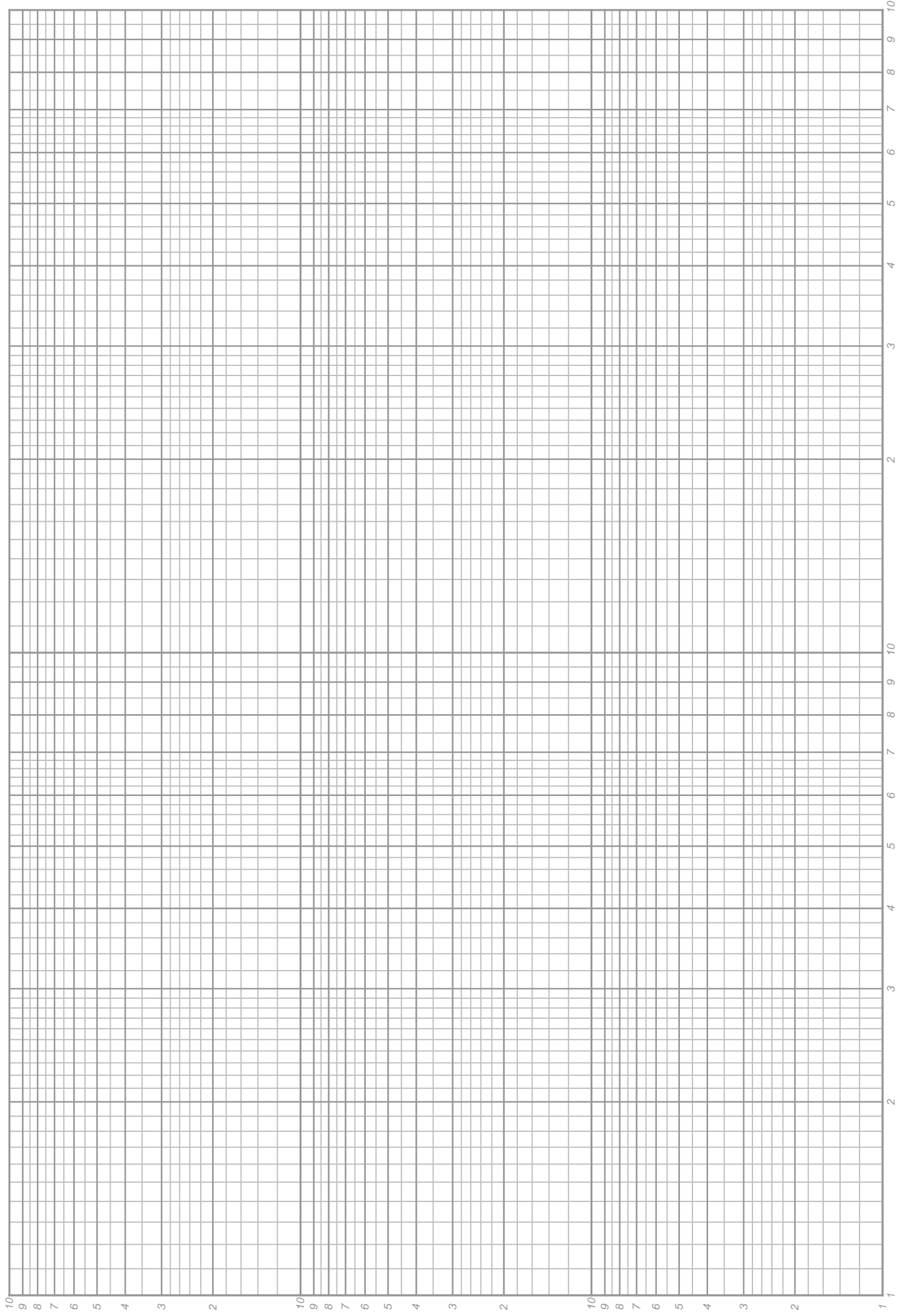
منحنی نوری سیاره ی ۷



منحنی نور سیاره ی ۸









وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»



چهاردهمین دوره‌ی المپیاد نجوم و اخترفیزیک
آزمون‌های پایانی

آزمون تحلیل داده ۲

(۲۶ شهریور ۱۳۹۷ - ساعت ۱۵:۳۰ تا ۲۰:۰۰)

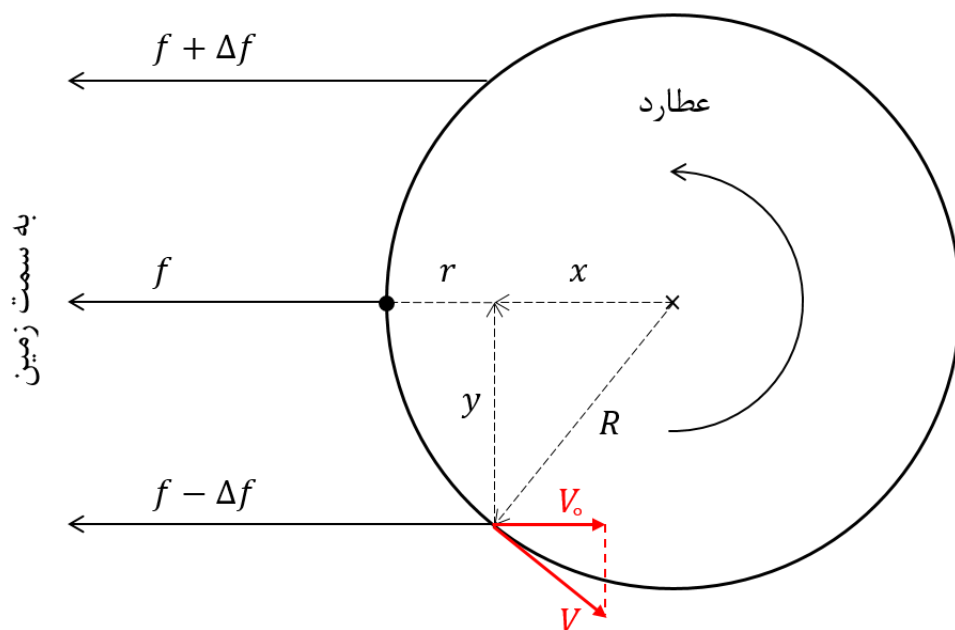
توجه: بارم سؤالات متفاوت است.

این صفحه عمدتاً خالی گذاشته شده است.

رفت و آمد به عطارد (۴۵ نمره) [طراح: دکتر حسین حق‌ی]

در تاریخ ۱۷ اوت ۱۹۶۵، تعدادی پالس رادیویی با فرکانس $f_0 = 430 \text{ MHz}$ توسط آنتن رادیویی رصدخانه‌ی آرسیبو^۱ به سوی نقاط مختلف سیاره‌ی عطارد ارسال شد و بازتابشان از سطح عطارد توسط آشکارسازهای زمینی دریافت شد. در صفحات ب و ج پیوست، شش پالس دریافتی آشکار شده را مشاهده می‌کنید که اثرات مداری زمین و عطارد از آنها حذف شده است. مقدار تأخیر زمانی (Δt) این پالس‌ها متفاوت است.

فرض کنید تمامی پالس‌ها از استوای عطارد بازتاب شده‌اند. شکل ۱، نحوه‌ی بازتاب پرتوها از سطح عطارد را نشان می‌دهد.



شکل ۱

سؤال ۱: برای هر کدام از تصاویر پیوست، مقدار تغییر فرکانس (Δf) را به دست آورید. از خطای خط کش صرف نظر کنید.

سؤال ۲: رابطه‌ای برای تصویر سرعت چرخشی استوایی عطارد در راستای خط دید زمین (V_0) بر حسب f_0 ، Δf و سرعت نور (c) به دست آورید.

راهنمایی: برای مقادیر کوچک ε می‌توان از تقریب $(1 + \varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ استفاده کرد.



سؤال ۳: با توجه به شکل ۱، روابطی برای x و y بر حسب شعاع عطارد (R)، Δt و c به دست آورید.

سؤال ۴: با برازش خط مناسب، دوره‌ی تناوب چرخشی عطارد (P) و R را به همراه خطا محاسبه کنید.

سؤال ۵: در زمان ارسال پالس‌ها عطارد در فاصله‌ی $a_M = 0.3977 \text{ AU}$ از خورشید و زمین در فاصله‌ی $a_E = 1.0116 \text{ AU}$ از خورشید قرار داشته است و کشیدگی عطارد $\alpha = (4.0 \pm 0.3)^\circ$ بوده است. همچنین رفت و برگشت پالس نوری $s = (616.125 \pm 0.017)$ طول کشیده است. مقدار AU را بر حسب کیلومتر به همراه خطا به دست آورید.

«هوش» کیهانی (۸۰ نمره) [طراح: محمد‌هادی ستوده]

در این بخش، فرض کنید کیهان تخت و پر از ماده^۱ است. هم‌چنین در زمان حال (t_0) ، $a_0 = 1$ است. به جز معادلات جدول ۱، سایر موارد باید اثبات شوند.

جدول ۱ - معادلات اصلی کیهان‌شناسی (توجه کنید که در برخی منابع به جای χ ، از r استفاده می‌شود).

عنوان	رابطه
معادله‌ی فریدمان	$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 = \frac{\Lambda\pi G}{3} \rho_{m,0} a^{-3}$
چگالی بحرانی کیهان	$\rho_c = \frac{3H^2}{\Lambda\pi G}$
دیفرانسیل فاصله‌ی همراه (در تمامی حالت‌ها)	$d\chi = -\frac{c dt}{a(t)}$
دیفرانسیل فاصله‌ی همراه (فقط برای اجرامی که نورشان در t_0 برسد)	$d\chi = \frac{c dz}{H(z)}$
قرمزگرایی بر حسب ضریب مقیاس زمان دریافت نور (a_r) و زمان تابش نور (a_e)	$1 + z = \frac{a_r}{a_e}$

جدول ۲، مختصات فراکهکشانی^۲ چند کهکشان و قرمزگرایی آن‌ها را از دید ناظر زمینی نشان می‌دهد.

جدول ۲ - مختصات چند کهکشان

#	عرض فراکهکشانی (SGB)	طول فراکهکشانی (SGL)	قرمزگرایی (z)
1	2.2	102.5	1.02
2	-5.6	146.8	0.84
3	17.0	131.0	1.95
4	-12.6	110.3	1.19
5	14.4	153.5	1.27

^۱ Matter only

^۲ Supergalactic Coordinates؛ برای اطلاعات بیشتر به صفحه‌ی د پیوست مراجعه کنید.

در زمان t_* ، در کهکشان UGC 5022 یک انفجار ابرنواختری رخ می‌دهد و نور آن به اطراف گسیل می‌شود. اطلاعات این کهکشان در جدول ۳ داده شده است.

جدول ۳ - اطلاعات کهکشان UGC 5022

7°.5	عرض فراکهکشانی (SGB)
123°.2	طول فراکهکشانی (SGL)
1.15	قرمزگرایی (Z)

این انفجار ابرنواختری توسط ناظران زمینی ثبت نشده است؛ اما در هر کدام از کهکشان‌های جدول ۲، ناظری حضور دارد که نور انفجار ابرنواختری، چند میلیارد سال بعد از t_* به او می‌رسد و انفجار را مشاهده می‌کند. هر ناظر در هنگام مشاهده‌ی انفجار، زمان سپری شده از مه‌بانگ^۱ را ثبت کرده و آن را با استفاده از تجهیزات قوی برای زمین مخابره می‌کند. این اطلاعات در آینده‌ی دور به دست ناظر زمینی رسیده و در جدول ۴ طبقه‌بندی می‌شود.

جدول ۴ - زمان مشاهده‌ی انفجار ابرنواختری از دید هر کدام از کهکشان‌های جدول ۲

#	زمان مشاهده (Myr)
1	5750
2	6370
3	5990
4	6120
5	7020

سؤال ۶: رابطه‌ی زیر برای فاصله‌ی همراه (χ) بین کهکشان UGC 5022 و هر یک از کهکشان‌های جدول ۲ بر حسب زمان وقوع انفجار (t_*) و زمان مشاهده‌ی ابرنواختر (t) را اثبات کنید. توجه کنید که فاصله‌ی همراه در زمان t_0 اندازه‌گیری می‌شود.

$$\chi = \frac{2}{3}c \left(\frac{2}{3H_0} \right)^{\frac{2}{3}} \left[t^{\frac{1}{3}} - t_*^{\frac{1}{3}} \right]$$



سؤال ۷: با استفاده از اطلاعات موجود و برازش خط، ثابت هابل (H_0) و زمان انفجار (t_*) را به همراه خطا به دست آورید. روش خود را به طور دقیق توضیح دهید و محاسبات میانی را گزارش کنید.

سؤال ۸: ناظر در هر کدام از کهکشان‌ها، قرمزگرایی هابلی ابرنواختر را چه قدر اندازه‌گیری می‌کند؟

سؤال ۹: نمودار قطبی آرایش کهکشان‌ها را با شرایط زیر رسم کنید:

- مرکز نمودار، کهکشان UGC 5022 باشد.
- نمودار از دید ناظر قطب شمال فراکهکشانی (تصویر روی استوا) رسم شود.
- محور شعاعی، فاصله‌ی ویژه باشد.
- نمودار مربوط به زمانی باشد که انفجار ابرنواختری در کهکشان ۲ مشاهده شده است.
- جهت کهکشان راه شیری روی نمودار مشخص شده باشد.

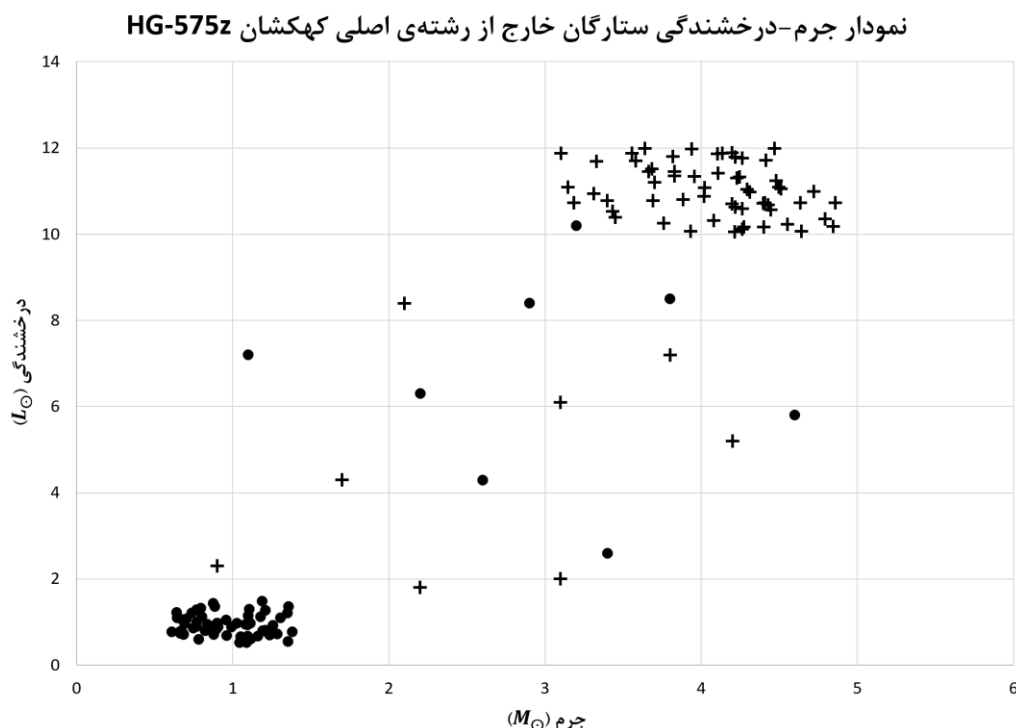
تفکیک و دسته‌بندی ستارگان (۱۴۵ نمره) [طراح: علی زینالی]

یکی از راهکارهای اخترفیزیک‌دانان برای آزمایش نظریه‌های تحول ستاره‌ای، تحلیل آماری جمعیت‌های ستاره‌ای (مانند خوشه‌های ستاره‌ای و کهکشان‌ها) است. در بررسی این ساختارها لازم است در اولین گام، ستارگان، دسته‌بندی و از یک‌دیگر تفکیک شوند. انجام درست این مرحله تأثیر به‌سزایی در صحت نتایج به دست آمده دارد. در ادامه با روش دسته‌بندی ستارگان یک کهکشان آشنا می‌شوید.

تفکیک ستارگان غول سرخ از کوتوله‌های سفید

نکته‌ی کلیدی در تفکیک این دو دسته، این است که ستارگان غول سرخ به طور متوسط جرم و درخشندگی بیشتری نسبت به ستارگان کوتوله‌ی سفید دارند؛ یعنی اگر نمودار درخشندگی بر حسب جرم را برای ستارگان موجود در کهکشان رسم کنیم، دو خوشه^۱ در نمودار دیده می‌شود که فاصله‌ی‌شان با یک‌دیگر معنادار است. در یکی از این خوشه‌ها، بیشتر ستارگان غول سرخ و در دیگری، بیشتر ستارگان کوتوله‌ی سفید قرار می‌گیرند. روشن است که مرز مشخصی میان این دو دسته وجود ندارد.

شکل ۲ نمونه‌ای از داده‌های جمع‌آوری شده از کهکشان HG-575z را نشان می‌دهد. در این نمودار ستارگان غول سرخ با علامت + و کوتوله‌های سفید با • نمایش داده شده‌اند.



شکل ۲ (این شکل کاربردی در حل مسئله ندارد.)

در بررسی ستارگان یک کهکشان، تعیین جرم و درخشندگی تک تک اعضا ممکن است. اما امکان تعیین نوع تمامی ستارگان وجود ندارد. به همین منظور، برای تعیین نوع ستارگان دو مرحله‌ی زیر طی می‌شود.

مرحله‌ی یادگیری

این مرحله شامل گام‌های زیر است:

- تعیین نوع دقیق تعدادی از ستارگان و محاسبه‌ی جرم و درخشندگی آن‌ها
 - محاسبه‌ی مختصات مرکز هندسی هر دسته بر روی نمودار جرم-درخشندگی (متوسط M و L ستارگان هر دسته)
 - انتخاب عمود منصف پاره‌خط واصل مرکزهای هندسی به عنوان مرز بین دو دسته
- در انتهای گام آخر، مرکز خوشه‌ی غول سرخ در یک سمت مرز و مرکز خوشه‌ی کوتوله‌ی سفید در سمت دیگر قرار می‌گیرد.

مرحله‌ی تعیین نوع ستارگان

در این مرحله سایر ستارگانِ کهکشان، دسته‌بندی می‌شوند. برای این کار از نتیجه‌ی مرحله‌ی یادگیری کمک می‌گیریم و ستارگان را بر اساس موقعیتشان نسبت به مرز، دسته‌بندی می‌کنیم.

جدول ۵ جرم، درخشندگی و نوع تعدادی از ستارگان کهکشان AM-694t را نشان می‌دهد.

جدول ۵ - مشخصات تعدادی از ستارگان کهکشان AM-694t

نوع ستاره	$L (L_{\odot})$	$M (M_{\odot})$	#
کوتوله‌ی سفید	6.30	2.2	1
غول سرخ	11.00	4.6	2
غول سرخ	9.85	4.2	3
غول سرخ	8.16	3.5	4
کوتوله‌ی سفید	0.33	0.7	5
کوتوله‌ی سفید	1.11	0.9	6
غول سرخ	10.79	4.4	7
غول سرخ	4.30	1.7	8
غول سرخ	8.82	3.9	9
کوتوله‌ی سفید	2.10	2.7	10

ادامه‌ی جدول ۵

کوتوله‌ی سفید	8.50	3.8	11
غول سرخ	8.40	2.1	12
کوتوله‌ی سفید	2.27	1.3	13
کوتوله‌ی سفید	6.80	2.1	14
غول سرخ	10.32	4.3	15
کوتوله‌ی سفید	2.43	1.5	16
غول سرخ	11.38	4.7	17
کوتوله‌ی سفید	0.66	0.8	18
غول سرخ	7.20	3.8	19
غول سرخ	6.10	3.1	20
کوتوله‌ی سفید	5.80	2.5	21
غول سرخ	7.70	3.2	22
غول سرخ	2.30	0.9	23
کوتوله‌ی سفید	1.78	1.1	24
کوتوله‌ی سفید	1.35	1.2	25
غول سرخ	5.20	4.2	26
غول سرخ	11.96	4.9	27
کوتوله‌ی سفید	0.41	0.6	28
کوتوله‌ی سفید	1.71	1	29
غول سرخ	9.73	4.1	30



سؤال ۱۰: برای ستارگان جدول ۵، مرحله‌ی یادگیری را پیاده‌سازی کنید و در نهایت پارامترهای زیر را گزارش کنید.

- مختصات مرکز هندسی هر دسته از ستارگان

- شیب و عرض از مبدأ مرز

سؤال ۱۱: نمودار درخشندگی بر حسب جرم ستارگان جدول ۵ را در کاغذ میلی‌متری رسم کنید. در این نمودار، غول سرخ‌ها را با علامت + و کوتوله‌های سفید را با علامت • نمایش دهید. پاره خط بین دو مرکز هندسی و مرز میان دو دسته را نیز در نمودار نشان دهید.

سؤال ۱۲: بر اساس مرز تعیین شده در سؤال ۱۰، چه تعدادی از داده‌های مرحله‌ی یادگیری به اشتباه دسته‌بندی می‌شوند؟ یعنی چه تعدادی از ستارگان غول سرخ، با این روش کوتوله‌ی سفید تشخیص داده می‌شوند و چه تعداد کوتوله‌ی سفید، غول سرخ تشخیص داده می‌شوند؟

سؤال ۱۳: کدام ستارگان جدول ۶ غول سرخ هستند؟ کدام ستارگان، کوتوله‌ی سفید هستند؟ توضیح دهید.

جدول ۶ - جرم و درخشندگی تعدادی از ستارگان کهکشان AM-694t

$L (L_{\odot})$	$M (M_{\odot})$	#
6.3	2.2	1
2.1	3.2	2
8.9	4.1	3
6.1	1.9	4

دسته‌بندی ستارگان غول سرخ

ستارگان غول سرخ دارای طبقه‌بندی‌های مختلفی هستند. در یکی از طبقه‌بندی‌های انجام شده بر اساس فراوانی خطوط طیفی، غول سرخ‌ها به دو دسته تقسیم می‌شوند. در این دو دسته، رابطه‌ی جرم-درخشندگی به صورت زیر است.

$$L_1 = C_1 \times M^\alpha \quad \text{دسته‌ی اول:}$$

$$L_2 = C_2 \times M^\alpha \quad \text{دسته‌ی دوم:}$$

مشخص است که رابطه‌ی لگاریتم درخشندگی و لگاریتم جرم این دو دسته، دو خط موازی هستند. (تنها عرض از مبدأ این دو خط متفاوت است).

همانند قسمت قبل، تعیین نوع دقیق تمامی ستارگان غول سرخ ممکن نیست. به همین دلیل دسته‌بندی در دو مرحله انجام می‌شود.

مرحله‌ی یادگیری

این مرحله شامل گام‌های زیر است:

- تعیین نوع دقیق تعدادی از ستارگان غول سرخ و محاسبه‌ی جرم و درخشندگی آن‌ها
- محاسبه‌ی ضرایب رابطه‌ی جرم-درخشندگی (C_1 , C_2 و α)
- انتخاب خطی با شیب α و عرض از مبدأ میانگین به عنوان مرز بین دو دسته

مرحله‌ی تعیین نوع ستارگان

در این مرحله سایر ستارگان غول سرخ، دسته‌بندی می‌شوند. برای این کار از نتیجه‌ی مرحله‌ی یادگیری کمک می‌گیریم و ستارگان را بر اساس موقعیتشان نسبت به مرز، دسته‌بندی می‌کنیم.

جدول ۷ جرم، درخشندگی و نوع تعدادی از ستارگان غول سرخ کهکشان AM-694t را نشان می‌دهد.

جدول ۷ - مشخصات تعدادی از ستارگان غول سرخ کهکشان AM-694t

نوع غول سرخ	$L (L_{\odot})$	$M (M_{\odot})$	#
نوع یک	25.1	3	1
نوع دو	61.0	4.3	2
نوع یک	34.1	3.2	3
نوع یک	70.1	4.6	4
نوع دو	90.6	4.8	5
نوع یک	33.9	3.4	6
نوع یک	50.1	4	7
نوع دو	81.0	4.9	8
نوع یک	47.2	3.9	9
نوع یک	63.0	4.2	10
نوع دو	31.7	3.1	11
نوع دو	51.7	3.8	12
نوع یک	41.6	3.7	13
نوع دو	27.0	2.9	14
نوع دو	36.9	3.3	15
نوع دو	36.0	3.6	16
نوع یک	31.6	3.3	17
نوع یک	27.2	3.1	18
نوع دو	86.1	4.7	19
نوع دو	73.5	4.4	20

سؤال ۱۴: با کمینه کردن خط^۱ روابطی برای برازش دو خط موازی بر داده‌های ستارگان غول سرخ به دست آورید. معادله‌ی خطوط برازش شده به صورت زیر است.

$$\log L_1 = a \log M_1 + b_1 \quad \text{خط اول:}$$

$$\log L_2 = a \log M_2 + b_2 \quad \text{خط دوم:}$$

که خط یک بر ستارگان نوع یک و خط دو بر ستارگان نوع دو برازش می‌شود. تابع خط را به صورت زیر در نظر بگیرید.

$$\text{Error} = \sum_{i \in \text{دسته‌ی اول}} (y_i - ax_i - b_1)^2 + \sum_{j \in \text{دسته‌ی دوم}} (y_j - ax_j - b_2)^2$$

سؤال ۱۵: با استفاده از نتیجه‌ی سؤال ۱۴، مقادیر C_1 ، C_2 و α را به دست آورید.

سؤال ۱۶: برای ستارگان جدول ۷، مرحله‌ی یادگیری را پیاده‌سازی کنید و در نهایت شیب و عرض از مبدأ مرز را گزارش کنید.

سؤال ۱۷: نمودار درخشندگی بر حسب جرم ستارگان جدول ۷ را در کاغذ لگاریتمی رسم کنید. کاغذ را **به صورت**

عمودی قرار دهید. در این نمودار، غول سرخ‌های نوع یک را با علامت \oplus و غول سرخ‌های نوع دو را با علامت \boxtimes نمایش دهید. مرز میان دو دسته را نیز در نمودار نشان دهید.

سؤال ۱۸: بر اساس مرز تعیین شده در سؤال ۱۶ چه تعدادی از داده‌های مرحله‌ی یادگیری به اشتباه دسته‌بندی می‌شوند؟

یعنی چه تعدادی از ستارگان غول سرخ نوع یک، با این روش نوع دو تشخیص داده می‌شوند و چه تعداد غول سرخ نوع دو، نوع یک تشخیص داده می‌شوند؟



سؤال ۱۹: کدام ستارگان جدول ۸، غول سرخ نوع یک هستند؟ کدام ستارگان، غول سرخ نوع دو هستند؟ توضیح دهید.

جدول ۸ - جرم و درخشندگی تعدادی از ستارگان غول سرخ کهکشان AM-694t

$L (L_{\odot})$	$M (M_{\odot})$	#
55.0	4.1	1
42.0	3.5	2
72.1	4.5	3
90.6	4.8	4



ثوابت فیزیکی و نجومی

مقدار	کمیت
$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$	G ثابت جهانی گرانش
$3.09 \times 10^{16} \text{ m}$	pc پارسک
$3.85 \times 10^{26} \text{ W}$	L_{\odot} درخشندگی خورشید
$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$	M_{\odot} جرم خورشید
$6.96 \times 10^8 \text{ m}$	R_{\odot} شعاع خورشید
$5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$	M_{\oplus} جرم زمین
6380 km	R_{\oplus} شعاع زمین
15.7°	δ_S میل قطب شمال فراکهکشانی
18.9^{h}	α_S بُعد قطب شمال فراکهکشانی

روابط برازش خطّ راست

$$y = Bx$$

$$d_i = y_i - Bx_i$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

$$(\Delta B)^2 \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-1}$$

$$y = A + Bx$$

$$d_i = y_i - (A + Bx_i)$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad A = \bar{y} - B\bar{x}$$

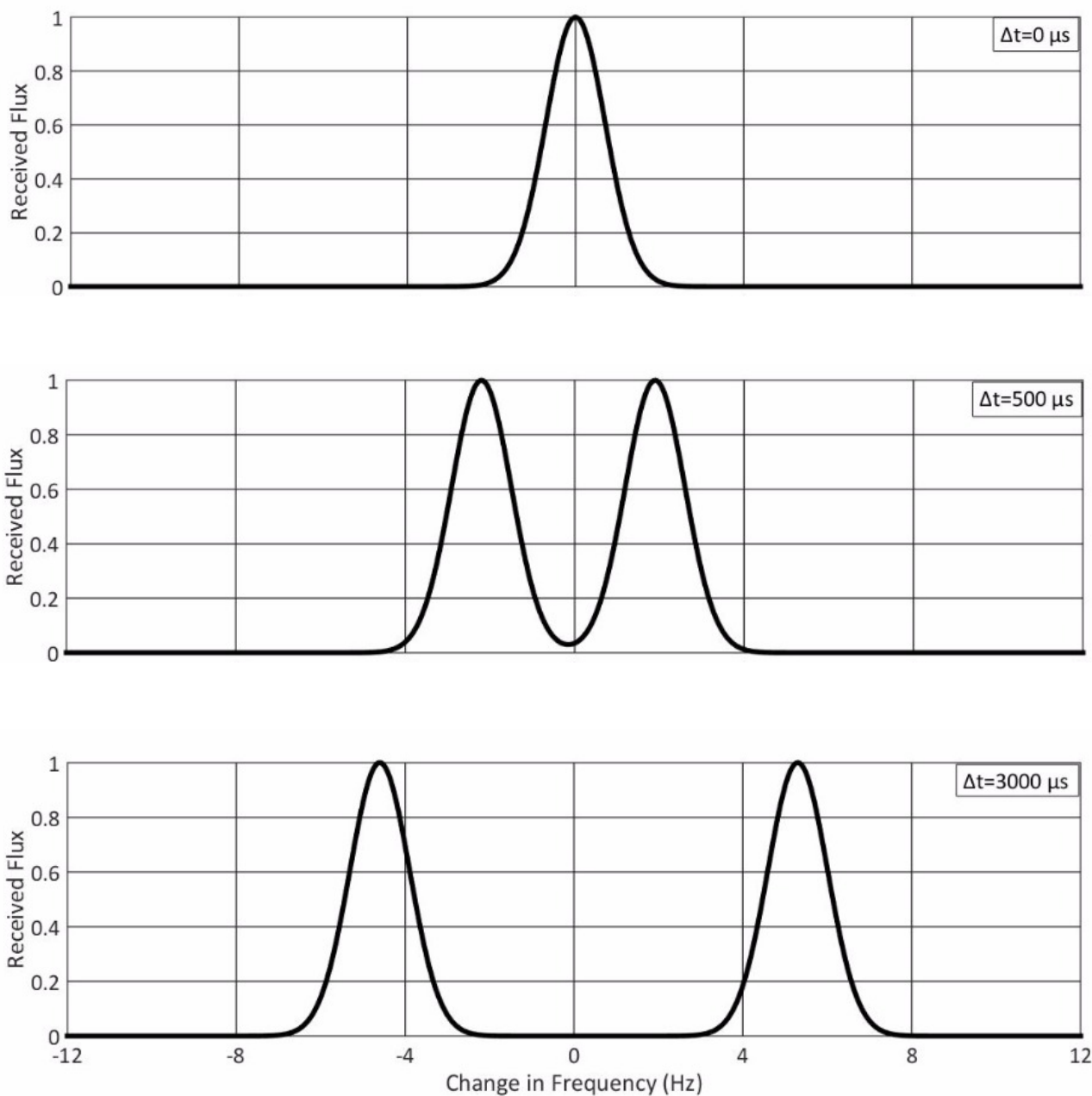
$$(\Delta B)^2 \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-2}$$

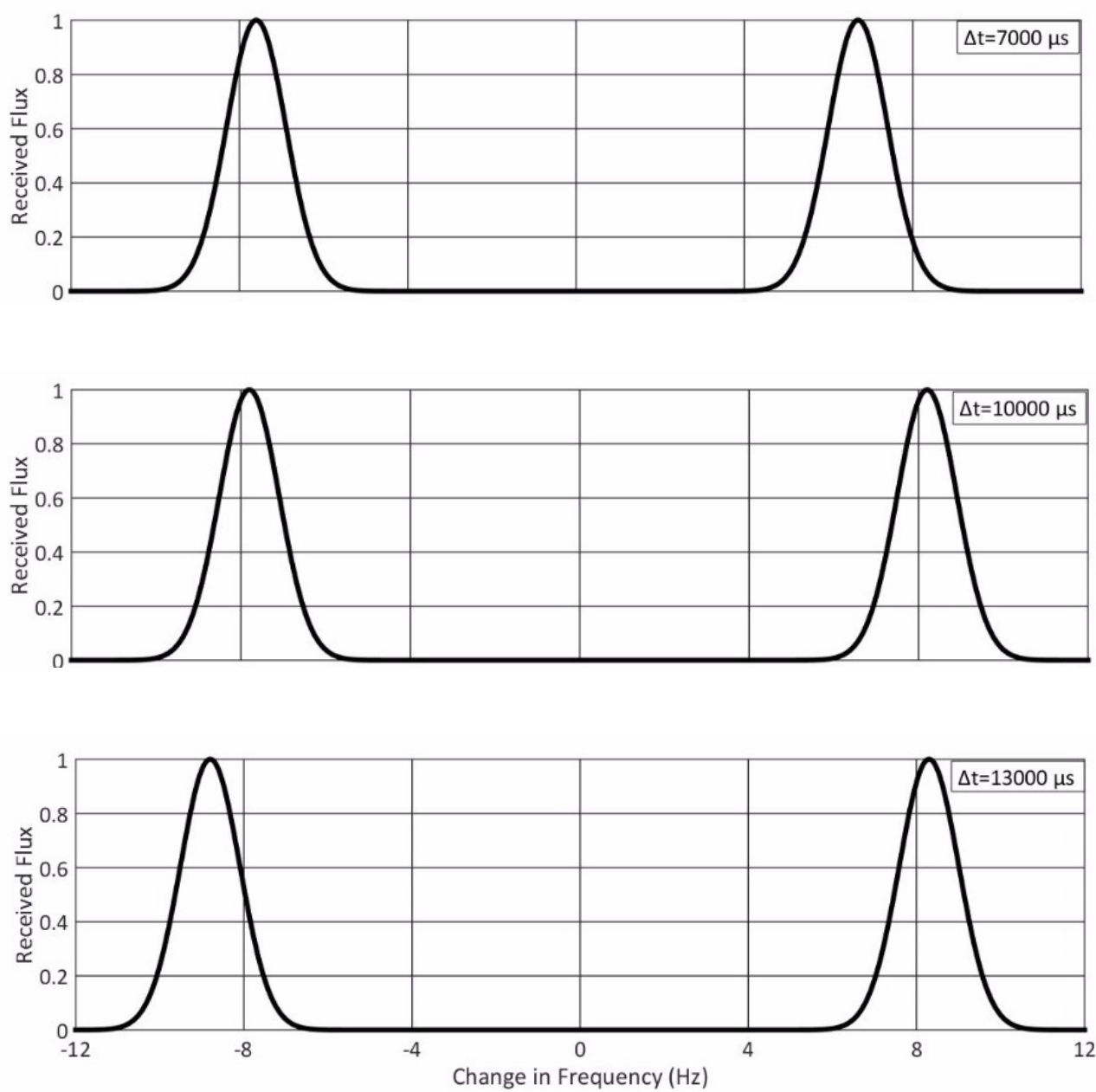
$$(\Delta A)^2 \approx \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \right) \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-2}$$

نمودارهای بخش اول: پالس‌های دریافت شده از عطار

محور افقی تغییر فرکانس (Δf) و محور عمودی شار دریافتی به‌هنگار شده است.

تاخیر زمانی هر نمودار در گوشه‌ی بالا سمت راست نوشته شده است.

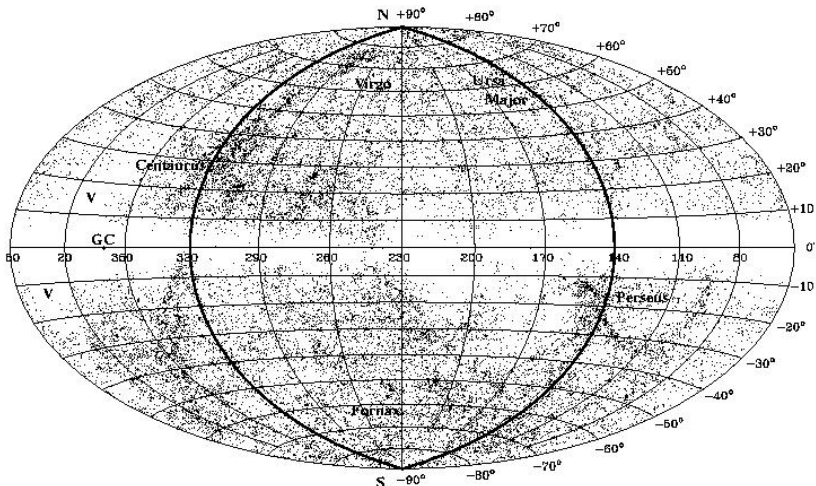




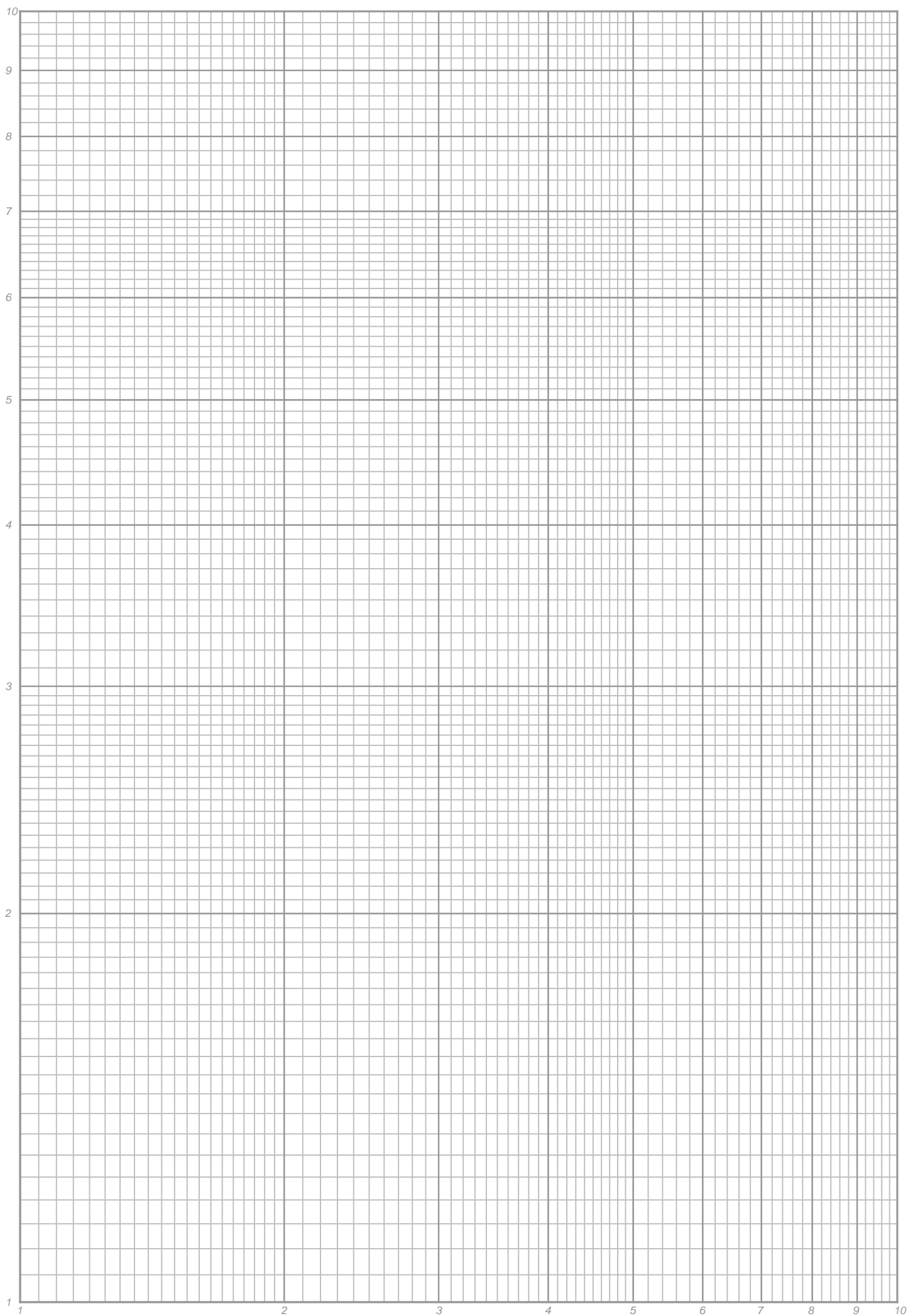
توضیحات بخش دوم: معرفی دستگاه مختصات فراکهکشانی

دستگاه مختصات فراکهکشانی، یک دستگاه مختصات کروی است که از آن برای مکان‌یابی کهکشان‌ها، خوشه‌های کهکشانی و ابرخوشه‌های دور دست استفاده می‌شود. استوای این دستگاه که صفحه‌ی فراکهکشانی نامیده می‌شود، یکی از ساختارهای شاخص در کیهان محلی است که حاصل کنار هم قرار گرفتن بخشی از خوشه‌ی سنبله، جاذب بزرگ^۱ و ابرخوشه‌ی حوت-برساووش در یک صفحه‌ی دو بعدی است.

مختصات فراکهکشانی یک نقطه با عرض و طول فراکهکشانی تعریف می‌شود. برای مشابهت با عرض (b) و طول (l) کهکشانی عرض و طول فراکهکشانی را به ترتیب با SGB و SGL نشان می‌دهند. طول کهکشانی از دید قطب شمال فراکهکشانی به صورت پادساعتگرد افزایش می‌یابد و مبدأ آن، تقاطع صفحه‌ی فراکهکشانی با استوای کهکشان راه شیری است.



دایره‌ی عظیمه‌ی فراکهکشانی در دستگاه مختصات کهکشانی



آزمون‌های تحلیل داده‌ی

دوره‌ی طلای ۹۸-۱۳۹۷

آزمون مفاهیم پایه‌ی تحلیل داده

تاریخ: ۱۱ بهمن ۱۳۹۷

مدت زمان: ۲۸۵ دقیقه

آزمون تحلیل داده ۱

تاریخ: ۲۲ اسفند ۱۳۹۷

مدت زمان: ۲۴۰ دقیقه

آزمون تحلیل داده با اکسل

تاریخ: ۲ اردیبهشت ۱۳۹۸

مدت زمان: ۳۴۵ دقیقه

آزمون تحلیل داده ۲

تاریخ: ۹ اردیبهشت ۱۳۹۸

مدت زمان: ۳۱۵ دقیقه



وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی(ره)»



چهاردهمین دوره‌ی طلای المپیاد نجوم و اخترفیزیک
آزمون‌های میان‌دوره

آزمون مفاهیم پایه‌ی تحلیل داده

(۱۱ بهمن ۱۳۹۷ - ساعت ۸:۰۰ تا ۱۲:۴۵)

توجه: بارم سؤالات متفاوت است.

ثوابت فیزیکی و نجومی

(توجه! ثوابت این جدول بدون خطا هستند.)

مقدار	کمیت
$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$	G ثابت جهانی گرانش
$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	c سرعت نور
$5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$	σ ثابت استفان-بولتزمن
$6.695 \times 10^{-27} \text{ kg}$	m_α جرم ذره ی آلفا
$3.20 \times 10^{-19} \text{ C}$	q_α بار ذره ی آلفا
$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$	m_H جرم اتم هیدروژن
$3.09 \times 10^{16} \text{ m}$	pc پارسک
$1.50 \times 10^{11} \text{ m}$	AU واحد نجومی
$3.85 \times 10^{26} \text{ W}$	L_\odot درخشندگی خورشید
4.83	قدر مطلق خورشید
$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$	M_\odot جرم خورشید
$6.96 \times 10^8 \text{ m}$	R_\odot شعاع خورشید
$5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$	M_\oplus جرم زمین
6380 km	R_\oplus شعاع زمین
86164 s	شبهانه روز نجومی

جدول بارم‌بندی سؤالات

سؤال	بارم	سؤال	بارم	سؤال	بارم
۱	۱۵	۶	۱۲	۱۱	۱۶
۲	۵	۷	۲۳	۱۲	۲۳
۳	۱۷	۸	۴	۱۳	۹
۴	۱۰	۹	۱۲		
۵	۶	۱۰	۱۹		



سؤال ۱ | طراح: شهاب‌الدین محین:

مقادیر x و y مطابق زیر می‌باشد. برای روابط زیر z را به صورت صحیح گزارش کنید.

$$x = 5/86 \pm 0/16 \quad y = 6/59 \pm 0/08$$

جدول ۱

#	رابطه
1	$x = z + y$
2	$z = 10^x - y$
3	$z = \log_x y$
4	$z = y^x$
5	$y = z \times x$

سؤال ۲ | طراح: پریمه صفریان:

برای کهکشانی در قرمزگرایی $z = 0/14$ با پارامترهای $H_0 = 67/77 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ و $q_0 = -0/60$ فاصله‌ی درخشندگی آن را گزارش کنید.

$$d_L \approx \frac{cz}{H_0} \left(1 + \frac{1 - q_0}{2} z \right)$$

سؤال ۳ | طراح: محمد‌هادی ستوده:

(به قسمت‌های الف و ب این سؤال حتماً در ۶۰ دقیقه‌ی ابتدایی آزمون پاسخ دهید.)

الف) طول انگشت اشاره‌ی خود را حساب کنید و به همراه خطا در پاسخنامه و در برگه‌ی پیوست بنویسید.

ب) قد خود را در پاسخنامه و در برگه‌ی پیوست با دقت سانتی‌متر بنویسید.

(به قسمت‌های ج و د این سؤال از دقیقه‌ی ۱۵۰ به بعد آزمون پاسخ دهید.)

داده‌هایی که همگی اندازه‌گیری کرده‌اید، در یک برگه به شما داده می‌شود.

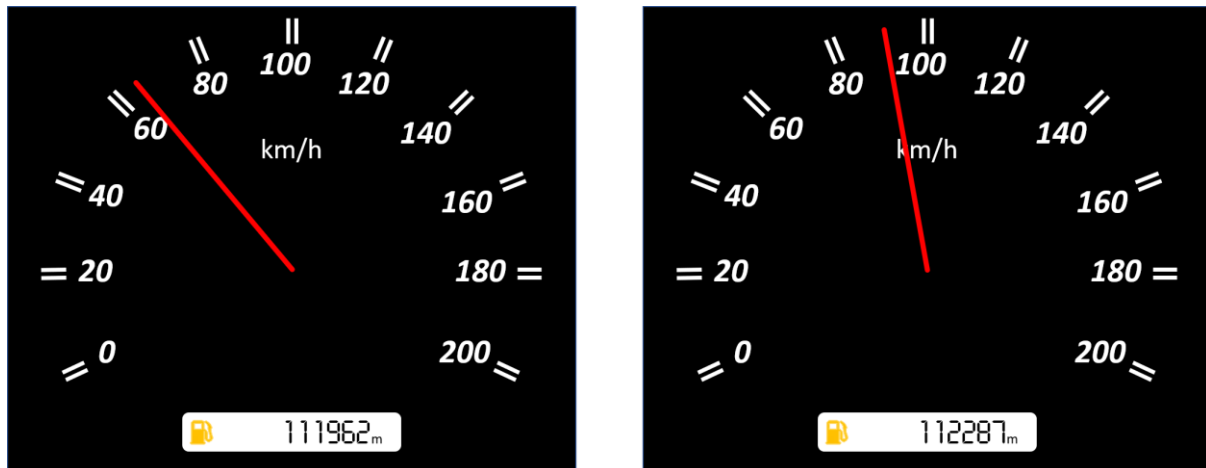
ج) نمودار طول انگشت اشاره بر حسب قد را رسم کنید.

د) خطی بر این داده‌ها برازش کنید و مقدار شیب، عرض از مبدأ و ضریب همبستگی (رگرسیون) را گزارش کنید. آیا رابطه‌ی

خطی توصیف مناسبی از وابستگی دو کمیت قد و طول انگشت اشاره است؟

سؤال ۴ | طراح: محمد‌هادی ستوده^۱:

علیرضا که به تازگی گواهینامه‌ی خود را دریافت کرده است، در حال رانندگی در بلوار نلسون ماندلا است. شکل ۱، صفحه‌ی داشبورد ماشین او در دو زمان متفاوت را نشان می‌دهد. (تصویر سمت چپ پیش از تصویر سمت راست تهیه شده است.)



شکل ۱

(الف) بدون استفاده از خط کش یا نقاله، سرعت در هر لحظه را به همراه خطا گزارش کنید.

(ب) با فرض ثابت بودن شتاب، زمان سپری شده بین دو تصویر و شتاب حرکت را به همراه خطا به دست آورید.

سؤال ۵ | طراح: روزبه قادری^۲:

دنباله‌داری در مداری سهموی با کمینه فاصله‌ی $r_p = 0.7 \text{ AU}$ از خورشید در حرکت است. ۷۵ روز بعد از حضيض، فاصله‌ی دنباله‌دار را تا خورشید به دست آورید.

برای حل معادله از روش نیوتن-رافسون^۱ با حدس اولیه‌ی $\nu_0 = 20^\circ$ استفاده کنید و تا مرحله‌ی سوم پیش روید. مقادیر عددی را در هر مرحله در پاسخ‌نامه بنویسید.

راهنمایی: معادله‌ی زمان در مدار سهمی معروف به معادله‌ی بارکر^۲ به صورت زیر است.

$$t = \sqrt{\frac{r_p^3}{GM}} \left[\tan\left(\frac{\nu}{2}\right) + \frac{1}{3} \tan^3\left(\frac{\nu}{2}\right) \right]$$

ν آنومالی حقیقی است.

^۱ Newton-Raphson Method

^۲ Barker's Equation



سؤال ۶ اطراح: پریمه صفریان:

موقعیت جسمی سماوی را که گرد خورشید می‌گردد در دستگاه مختصات قطبی خورشیدمرکزی ثبت و در جدول ۲ آورده‌ایم. θ از حسیض سنجیده شده است. پارامترهای مداری آن را به همراه خطا به دست آورید.

جدول ۲

#	θ (°)	r (AU)
1	2.46	0.3878
2	9.91	0.3913
3	17.07	0.3986
4	23.84	0.4095
5	33.29	0.4320
6	-21.49	0.4053
7	-38.50	0.4488
8	-51.05	0.5052
9	-40.34	0.5283
10	-48.27	0.5445

سؤال ۷ اطراح: روزبه قادری:

کهکشان دور دست RG21 به تازگی مورد بررسی‌های بیشتری قرار گرفته است و منجمان به دنبال یافتن مقدار دقیق قرمزگرایی آن هستند. بدین منظور آن‌ها می‌خواهند ابتدا فاصله‌ی قطر زاویه‌ای و فاصله‌ی درخشندگی آن را به دست بیاورند. مدول فاصله‌ی این کهکشان $\mu_{RG21} = 36.6 \pm 0.4$ اندازه‌گیری شده است.

الف) فاصله‌ی درخشندگی این کهکشان را به همراه خطا به دست آورید.

پهنای زاویه‌ای این کهکشان در آسمان حدود $\theta = 51.0 \pm 1.7$ ثانیه‌ی قوسی است، اما از شعاع آن اطلاعی نداریم. با فرض این که شعاع این کهکشان بتواند هر یک از مقادیر جدول ۳ را داشته باشد،

ب) فاصله‌ی قطر زاویه‌ای و قرمزگرایی متناظر با هر شعاع را به همراه خطا گزارش کنید.

ج) با توجه به قسمت «ب»، میانگین فاصله‌ی قطر زاویه‌ای و میانگین قرمزگرایی را به همراه خطا گزارش کنید.

جدول ۳

#	R (kpc)
1	22
2	19.5
3	17
4	15.5
5	14



سؤال ۸ اطراح: شهاب‌الدین محین:

به تعداد خوشه‌های کروی یک کهکشان در بازه‌ی $[L - \delta, L + \delta]$ ، تابع درخشندگی خوشه‌های کروی^۱ می‌گویند که L درخشندگی خوشه‌ی کروی است. می‌توان نشان داد که اگر GCLF بر حسب قدر ظاهری نوشته شود، توزیعش گاوسی خواهد بود. فرض کنید میانگین قدر ظاهری خوشه‌های کروی M_{31} برابر با $14/5$ و $\bar{m}_1 = 14/5$ و انحراف معیار آن $\sigma_1 = 1/2$ است. میانگین قدر ظاهری خوشه‌های کروی M_{32} برابر با $15/5$ و $\bar{m}_2 = 15/5$ و انحراف معیار آن $\sigma_2 = 0/7$ است. احتمال رصد کردن کهکشان M_{31} برابر با $2/3$ و $p_{31} = 2/3$ و احتمال رصد کردن کهکشان M_{32} برابر با $1/3$ و $p_{32} = 1/3$ است. اگر یک خوشه‌ی کروی با قدر ظاهری $m = 15/1$ رصد شود، احتمال این که به M_{31} تعلق داشته باشد بیشتر است یا M_{32} ؟

سؤال ۹ اطراح: شهاب‌الدین محین:

در المپیاد جهانی ۲۰۲۰ تصمیم گرفته‌اند که شب اول از بچه‌ها امتحان رصد گرفته شود. بنابراین شب اول بچه‌ها را به رصدگاه می‌برند و اگر شرایط آب و هوایی خوب باشد، امتحان رصد برگزار می‌شود؛ وگرنه امتحان رصد به شب بعد منتقل می‌شود. حال اگر شب دوم شرایط آب و هوایی خوب باشد، امتحان رصد برگزار می‌شود؛ وگرنه امتحان رصد به شب بعد منتقل می‌شود و به همین ترتیب این روند ادامه می‌یابد. فرض کنید احتمال این که هر شب، ابری باشد برابر با p و احتمال ابری شدن هر شب مستقل از شب‌های دیگر باشد.

الف) احتمال این که امتحان رصد با موفقیت در شب k ام برگزار شود را حساب کنید.

ب) ثابت کنید که برای تابع توزیع بالا $\sum_{k=1}^{\infty} P(k) = 1$ است.

برای تمامی قسمت‌های بعد فرض کنید $p = 0/7$ است.

ج) امید ریاضی تابع توزیع قسمت «الف» را محاسبه کنید.

د) مد تابع توزیع قسمت «الف» را محاسبه کنید.

ه) واریانس تابع توزیع قسمت «الف» را محاسبه کنید.

و) میانه‌ی تابع توزیع قسمت «الف» را محاسبه کنید.



سؤال ۱۰ [طراح: روزبه قادری]:

دو متحرک در لحظه‌ی $t = 0$ از مبدأ مختصات به حرکت درمی‌آیند. در زمان‌های مشخصی سرعت دو متحرک در جدول ۴ آمده است. در هر بازه تغییرات سرعت را خطی در نظر بگیرید.

جدول ۴

#	t (min)	v_A (km h ⁻¹)	v_B (km h ⁻¹)
1	2	30	15
2	4	55	45
3	6	25	60
4	8	60	25
5	10	50	85

الف) نمودار سرعت بر حسب زمان دو متحرک را در یک کاغذ رسم نمایید و با استفاده از آن، زمان(هایی) را که دو متحرک سرعتشان یکی می‌شود را به دست آورید و بگویید در آن زمان سرعت چه قدر است.

ب) اولین بار در چه زمان و مکانی متحرک B از متحرک A سبقت می‌گیرد؟



سؤال ۱۱ [طراح: پریمه صفریان]:

هرگاه نیروی اصطکاک قوی مانع انجام نوسان شود، نوسانگر به آرامی به حالت تعادل باز خواهد گشت. به این نوسانگر، تئدمیرا می‌گوییم که نوساناتش از معادله‌ی دیفرانسیل زیر تبعیت می‌کند.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \gamma > \omega_0.$$

جواب این معادله‌ی دیفرانسیل به صورت زیر است.

$$x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}$$

A و B دو ثابت هستند که به شرایط اولیه بستگی دارند و r_1 و r_2 جواب‌های معادله‌ی $r^2 + 2\gamma r + \omega_0^2 = 0$ هستند.

برای این نوسانگر $\gamma = 3/0.2$ و $\omega_0 = 2/51 \text{ s}^{-1}$ است. هم‌چنین مقدار x را به همراه خطا در زمان‌های مختلف در جدول ۵ ثبت کرده‌ایم. مقدار اولیه‌ی x و سرعت اولیه را محاسبه کنید.

جدول ۵

#	x (m)	Δx (m)	t (s)
1	0.750	0.010	0.08
2	0.46	0.03	0.19
3	0.39	0.07	0.24
4	0.32	0.05	0.30
5	0.250	0.020	0.38
6	0.22	0.03	0.42
7	0.13	0.05	0.58
8	0.09	0.08	0.69
9	0.06	0.04	0.83
10	0.040	0.020	0.97



سؤال ۱۲ | طراح: روزبه قادری:

در یک خوشه‌ی کروی، تابع جرم اولیه‌ی ستارگان به صورت زیر است.

$$N(M)dM = \begin{cases} AM^{-1/3}dM & 0.2M_{\odot} \leq M \leq 0.9M_{\odot} \\ BM^{-2/3}dM & 0.9M_{\odot} \leq M \leq 50M_{\odot} \end{cases}$$

$N(M)dM$ تعداد ستارگان در بازه‌ی جرمی M تا $M + dM$ است. تعداد ستارگان این خوشه 10^6 است.

الف) مقادیر A و B را به دست آورید.

ب) اگر رابطه‌ی جرم-درخشندگی ستارگان به صورت $L \propto M^{3/5}$ باشد، $N(L)dL$ را بیابید.

ج) با توجه به بازه‌های جدول ۶، نمودار تعداد ستاره‌ها بر حسب مرکز هر بازه را در کاغذ مناسب رسم نمایید.

جدول ۶

#	بازه‌ی جرم (M_{\odot})
1	[0,10)
2	[10,20)
3	[20,30)
4	[30,40)
5	[40,50]

سؤال ۱۳ | طراح: شهاب‌الدین محین:

الف) فرض کنید ستاره‌ای در لحظه‌ی اول در نقطه‌ی $x = 0$ باشد. این ستاره در هر گام، یک واحد به سمت راست یا چپ می‌رود. احتمال این که در گام ۱۱ام در نقطه‌ی $x = -5$ باشد، چه قدر است؟

ب) حال فرض کنید که این ستاره در لحظه‌ی اول در نقطه‌ی $(0,0)$ باشد. این ستاره در هر گام، به صورت هم‌شانسی یک واحد در راستای x یا y جابه‌جا می‌شود. به عنوان مثال در گام اول در یکی از نقاط $(0,-1)$ ، $(0,1)$ ، $(1,0)$ و $(-1,0)$ قرار دارد. احتمال این که در گام ۱۰ام در نقطه‌ی $(x,y) = (-6,0)$ باشد، چه قدر است؟

ج) حال فرض کنید که این ستاره در لحظه‌ی اول با احتمال p_1 در نقطه‌ی $(0,0)$ ، با احتمال p_2 در نقطه‌ی $(1,0)$ ، ... و با احتمال p_{2N} در نقطه‌ی $(2N-1,0)$ باشد. این ستاره در هر گام، به صورت هم‌شانسی یک واحد در راستای x یا y جابه‌جا می‌شود. احتمال این که در گام $4N$ در نقطه‌ی $(x,y) = (-N,0)$ باشد، چه قدر است؟ فرض کنید که $p_1 = p_2 = \dots = p_{2N}$ است.

روابط برازش خطّ راست

$$y = A + Bx$$

$$d_i = y_i - (A + Bx_i)$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N y_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad A = \bar{y} - B\bar{x}$$

$$(\Delta B)^2 \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

$$(\Delta A)^2 \approx \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \right) \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

$$r = \frac{\overline{xy} - \bar{x}\bar{y}}{\sqrt{(\overline{x^2} - \bar{x}^2)(\overline{y^2} - \bar{y}^2)}}$$

$$y = Bx$$

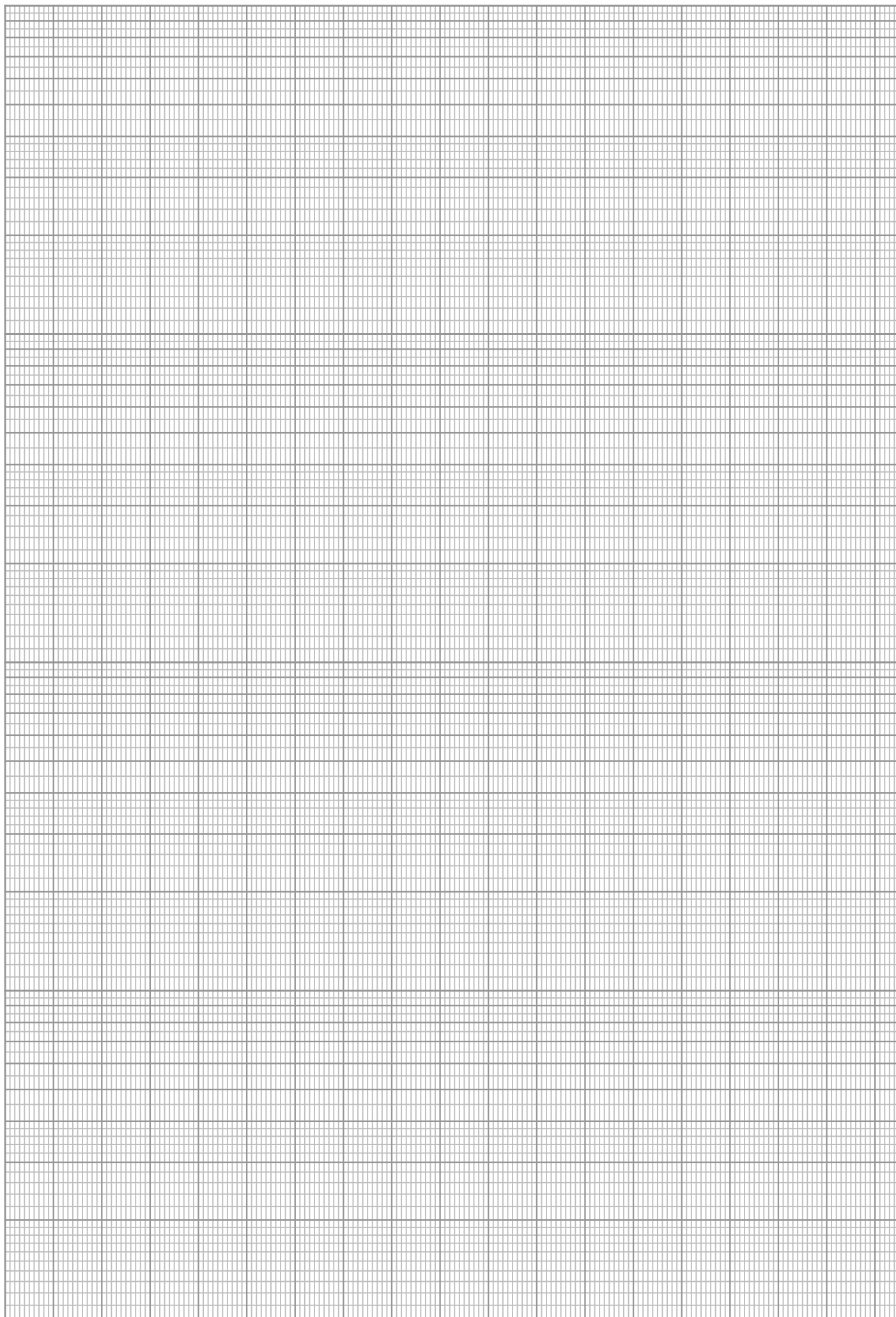
$$d_i = y_i - Bx_i$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

$$(\Delta B)^2 \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 1}$$

تابع توزیع نرمال

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$$





وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی(ره)»



چهاردهمین دوره‌ی طلای المپیاد نجوم و اخترفیزیک
آزمون‌های میان‌دوره

آزمون تحلیل داده ۱

(۲۲ اسفند ۱۳۹۷ - ساعت ۸:۰۰ تا ۱۲:۰۰)

توجه: بارم سؤالات متفاوت است.

این صفحه عمدتاً خالی گذاشته شده است.

مطالعه‌ی تشکیل کهکشان‌ها (۱۰۰ نمره) [طراح: پریمه صفریان]

با مطالعه‌ی چگونگی تشکیل کهکشان‌ها می‌توان اطلاعات جالبی از کیهان اولیه به دست آورد. داده‌های جدول ۱ را از رصد فاصله‌ی زاویه‌ای کهکشان‌های مجاور هم به دست آورده‌ایم که در آن θ فاصله‌ی زاویه‌ای، z قرمزگرایی دو کهکشان و N تعداد جفت‌های کهکشانی است که در قرمزگرایی z ، فاصله‌ی زاویه‌ای θ داشته‌اند. هم‌چنین با استفاده از شمع‌های استاندارد که با تحلیل رصدها یافته‌ایم، فاصله‌ی درخشندگی جفت‌های کهکشان از خودمان (d_L) را نیز محاسبه و در جدول ۱ ذکر کرده‌ایم.

جدول ۱

#	N	z	$d_L (h^{-1} \text{ Mpc})$	$\theta(^{\circ})$
1	83	0.277	1009	0.870
2	69	0.311	1158	0.943
3	58	0.060	188	5.533
4	46	0.406	1599	1.099
5	42	0.269	976	1.788
6	34	0.430	1718	1.410
7	27	0.152	509	4.779
8	24	0.277	1011	2.966
9	18	0.531	2250	2.188
10	16	0.193	667	6.232
11	14	0.581	2528	2.582
12	12	0.286	1048	5.689
13	11	0.386	1502	4.914
14	17	0.352	1342	5.944
15	23	0.366	1411	5.935
16	16	0.426	1698	5.222
17	9	0.379	1471	6.176
18	8	0.572	2477	4.472
19	7	0.479	1970	5.760
20	7	0.392	1532	7.399
21	6	0.578	2513	5.690
22	6	0.583	2538	5.831

سؤال ۱: فاصله‌ی میان جفت کهکشان‌ها در دستگاه مختصات همراه را r بنامید و آن را برای هر داده محاسبه کنید.

بررسی فاصله‌ی دو به دوی کهکشان‌ها برایمان جالب است.

سؤال ۲: ابتدا جدول شماره‌ی ۱ پاسخ‌نامه را پر کنید و سپس نمودار فراوانی نسبی کهکشان‌ها را بر حسب r رسم کنید.

سؤال ۳: تنها با در نظر گرفتن انبساط کیهان انتظار داریم نمودار، فاقد افت و خیزهای موضعی باشد. در کدام r نتیجه‌ی غیرمترقبه‌ای حاصل شده است؟ آن را بر حسب Mpc و به همراه خطا گزارش کنید.

با توجه به آخرین داده‌های پلانک مقدار پارامتر h مطابق با مقدار زیر است.

$$h = \frac{H_0}{100 \frac{\text{km s}^{-1}}{\text{Mpc}}} = 0.667 \pm 0.004$$

تحلیل کیهان‌شناسان این است که ماده‌ی باریونی به دلیل فشار فوتون‌ها، از ابتدای عالم تا زمان واجفتیدگی ($z_{\text{decoupling}} \approx 1100$) با سرعت صوت حرکت می‌کند. پس از واجفتیدگی، ماده‌ی باریونی تنها تحت تأثیر گرانش ماده‌ی تاریک خواهد بود^۱. به این ترتیب، انبساطی از ماده‌ی باریونی، در فاصله‌ای که ماده‌ی باریونی تا آن زمان رفته است، تشکیل خواهد شد. کهکشان‌ها محصول رمبش ماده‌ی باریونی و تاریک هستند.

سؤال ۴: می‌دانیم سرعت صوت از رابطه‌ی $c_s = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$ تبعیت می‌کند که در آن $B = -V \frac{dP}{dV}$ است. همچنین ρ ، P و V به ترتیب فشار، چگالی و حجم هستند. با توجه به رابطه‌ی معکوس حجم و چگالی رابطه‌ی زیر را برای سرعت صوت به دست آورید.

$$c_s = \sqrt{\frac{dP}{d\rho}}$$

فشار و چگالی در این دوران را تنها ناشی از ماده و تابش فرض کنید. κ را نسبت چگالی ماده به تابش تعریف کنید. توجه کنید که $\kappa(t)$ تنها وابسته به زمان است.

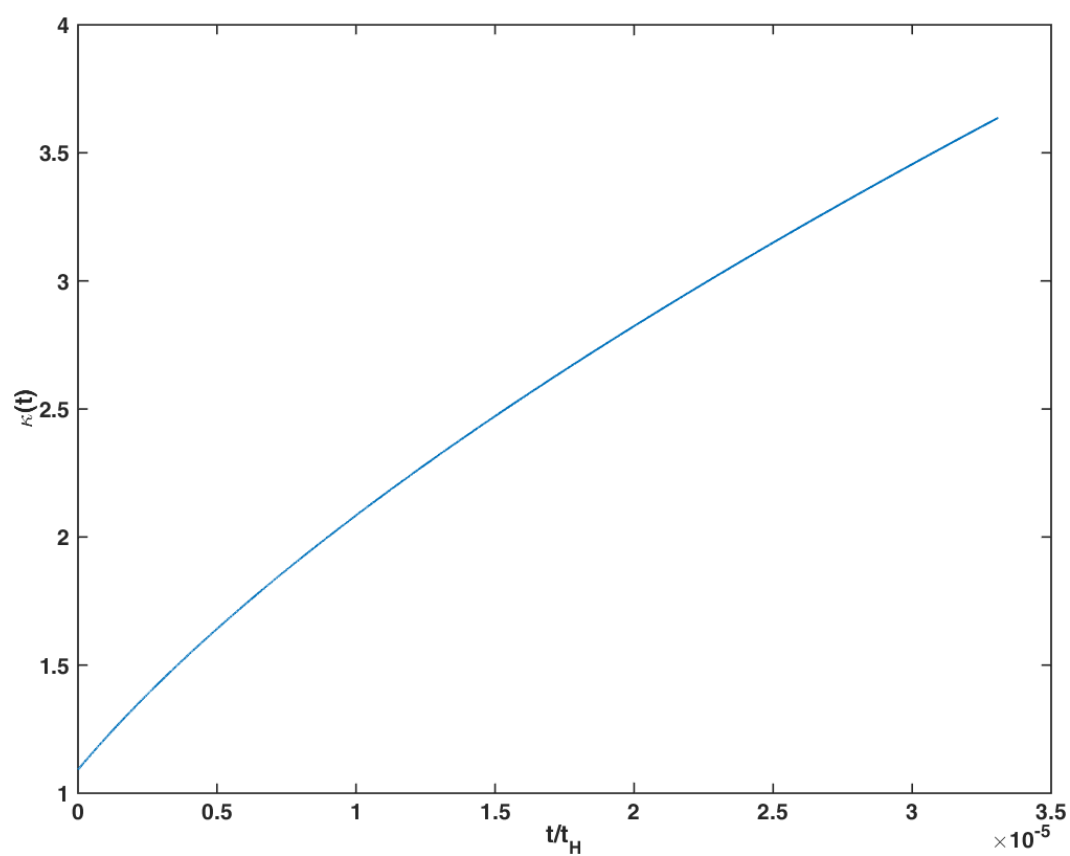
سؤال ۵: سرعت صوت را بر حسب $\kappa(t)$ و سرعت نور به دست آورید.

$$c_s = \frac{c}{\sqrt{3(1 + \kappa(t))}}$$

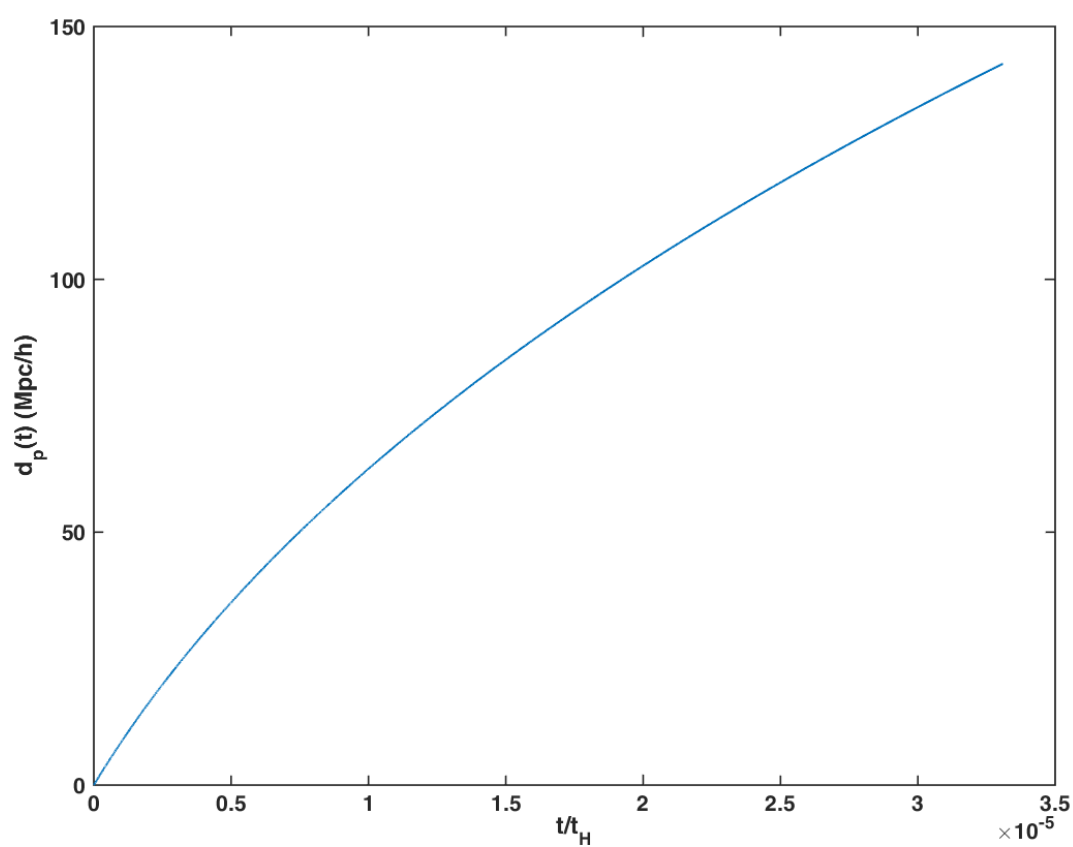
سؤال ۶: فاصله‌ای را که باریون‌ها تا زمان واجفتیدگی طی کرده‌اند، به صورت انتگرالی به دست آورید.

سؤال ۷: انتگرال سؤال ۶ را با استفاده از نمودارهای داده شده محاسبه کنید. می‌توانید به جای $\kappa(t)$ از مقدار میانگین آن استفاده کنید.

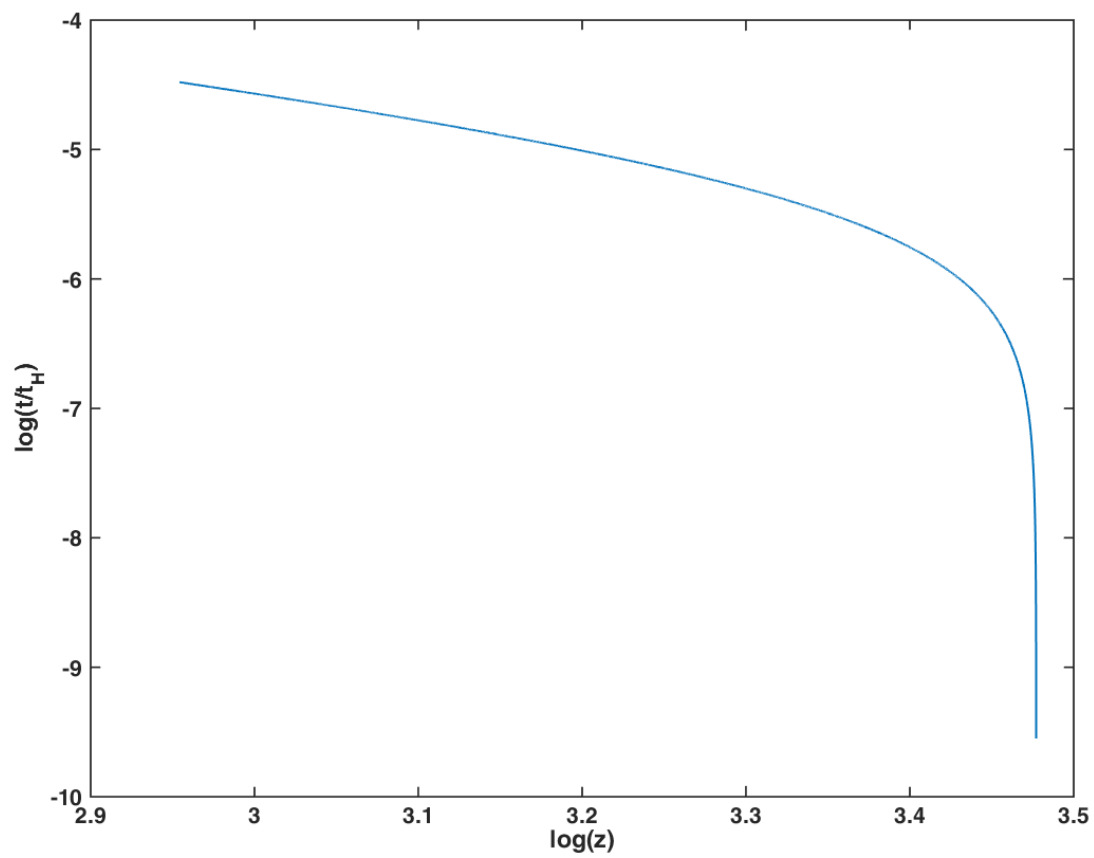
^۱ ماده‌ی تاریک با فوتون‌ها برهم‌کنشی ندارد.



شکل ۱



شکل ۲



شکل ۳

بررسی طیفی هسته‌های کهکشانی فعال^۱ (۱۴۰ نمره) [طراح: روزبه قادری]

کهکشان‌های رادیویی، اخروش‌ها^۲، بلازارها^۳ و ... جزء دسته‌ی هسته‌های کهکشانی فعال هستند. هسته‌های این کهکشان‌ها در نواحی مختلف طیف، تابشی قوی از خود دارند که از تابع جسم سیاه پیروی نمی‌کند. قسمتی از این تابش ناشی از تابش الکترون‌های منفردی است که تحت میدان مغناطیسی حرکت مارپیچ انجام می‌دهند. محققین بر این باورند که عمده‌ی تابش پرقدرت هسته‌ی بعضی از کهکشان‌ها، به دلیل افزایش جرم سیاه‌چاله‌ی مرکزی آن‌ها است.

تابعیت شار انرژی گسیل شده‌ی دریافتی AGN‌ها برحسب فرکانس در محدوده‌ای که تابش می‌کنند، با تقریب خوبی از فرم توانی پیروی می‌کند.

$$F_\nu d\nu = F_0 \nu^{-\alpha} d\nu$$

در این سؤال قصد داریم گونه‌ی خاصی از این AGN‌ها را که فقط در محدوده‌ی نور مرئی تابش می‌کنند، بررسی کنیم. طول موج محدوده‌ی مرئی در بازه‌ی ۳۸۰ nm تا ۷۴۰ nm است.

برای کالیبره کردن رابطه‌ی توانی، به دست آوردن مقادیر α و F_0 ، تعدادی از AGN‌های با فاصله‌ی یکسان d_0 را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در جدول‌های ۲ تا ۵ برای ۴ کهکشان فعال مقادیر F_ν آورده شده است.

جدول ۲ - AGN1

#	λ (nm)	F_ν (μJy)
1	400	344.9
2	480	451.1
3	560	576.1
4	640	699.6
5	720	843.8

جدول ۳ - AGN2

#	λ (nm)	F_ν (μJy)
1	400	348.2
2	480	459.9
3	560	569.2
4	640	697.8
5	720	820.4

^۱ Active Galactic Nuclei (AGN)

^۲ Quasar

^۳ Blazar

جدول ۴ - AGN3

#	λ (nm)	F_v (μJy)
1	400	343.7
2	480	449.0
3	560	577.2
4	640	703.6
5	720	851.4

جدول ۵ - AGN4

#	λ (nm)	F_v (μJy)
1	400	345.1
2	480	458.9
3	560	569.1
4	640	702.9
5	720	826.1

در مسئله فرض کنید فیزیک تمام AGN‌های مورد بررسی یکسان است. به عبارتی تنها پارامتر متغیر، فاصله است.

سؤال ۸: برای هر یک از AGN‌ها α و F_0 را به همراه خطا به دست آورید.

سؤال ۹: α و F_0 را به همراه خطا گزارش کنید.

رابطه‌ی توانی برای این دسته از AGN‌ها کالیبره شده است. در قدم بعد سعی بر بررسی تعدادی AGN مشابه در فواصل مختلف داریم. در جدول ۶ فاصله‌ی تعدادی از AGN‌ها بر حسب d_0 آورده شده است.

جدول ۶

#	d (d_0)
1	1.1
2	1.7
3	0.7
4	0.8
5	0.5
6	1.6
7	1.4
8	0.9
9	2.0
10	0.6



سؤال ۱۰: شار مرئی هر AGN را به همراه خطا گزارش کنید.

سؤال ۱۱: نمودار شار مرئی را بر حسب فاصله (ضریبی از d_0) رسم نمایید.

سؤال ۱۲: اگر با یک تلسکوپ با قطر دهانه‌ی $m \ 2/1$ این AGN ها را رصد کنیم، منحنی مربوط به حداقل شاری را که می‌توان با این تلسکوپ دید، در نمودار سؤال قبل بکشید.

سؤال ۱۳: هر یک از AGN ها به چه احتمالی دیده خواهند شد؟ جوابتان را تا ۳ رقم اعشار گزارش کنید.

جدول مربوط به انتگرال تابع توزیع نرمال، در پیوست آورده شده است.

سؤال ۱۴: اگر بخواهیم همه‌ی AGN های جدول ۶ به احتمال بالای $0/990$ دیده بشوند، قطر دهانه‌ی تلسکوپ چه قدر باید باشد؟



ثوابت فیزیکی و نجومی

(توجه! ثوابت این جدول بدون خطا هستند.)

مقدار	کمیت
$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$	G ثابت جهانی گرانش
$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	c سرعت نور
$5.67 \times 10^{-8} \text{ W m}^{-2} \text{ K}^{-4}$	σ ثابت استفان-بولتزمن
$1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$	m_H جرم اتم هیدروژن
$3.09 \times 10^{16} \text{ m}$	pc پارسک
-26.7	m_{\odot} قدر ظاهری خورشید
1367 W m^{-2}	F_{\odot} روشنایی خورشید
$3.85 \times 10^{26} \text{ W}$	L_{\odot} درخشندگی خورشید
$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$	M_{\odot} جرم خورشید
$6.96 \times 10^8 \text{ m}$	R_{\odot} شعاع خورشید
8 mm	D_{eye} قطر مردمک چشم انسان
$6/5$	m_{eye} قدر حدی چشم انسان

تبدیل واحد

$$10^{-26} \text{ W m}^{-2} \text{ Hz}^{-1}$$

$$1 \text{ Jy} \quad 1 \text{ جانشکی}$$

روابط برازش خطّ راست

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{x}$$

$$d_i = y_i - (A + Bx_i)$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad A = \bar{y} - B\bar{x}$$

$$(\Delta B)^2 \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

$$(\Delta A)^2 \approx \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \right) \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 2}$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{B}\mathbf{x}$$

$$d_i = y_i - Bx_i$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

$$(\Delta B)^2 \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N - 1}$$

جدول انتگرال تابع توزیع گausی

$$(\bar{x} = \cdot, \quad \sigma^2 = 1)$$

Standard Normal Cumulative Probability Table



Cumulative probabilities for POSITIVE z-values are shown in the following table:

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998



وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی (ره)»



چهاردهمین دوره‌ی طلای المپیاد نجوم و اخترفیزیک
آزمون‌های پایانی

آزمون تحلیل داده با اکسل

(۲ اردیبهشت ۱۳۹۸ - ساعت ۸:۰۰ تا ۱۳:۴۵)

توجه: بارم سؤالات متفاوت است.

این صفحه عمدتاً خالی گذاشته شده است.



آب گرم‌کن خورشیدی (۲۵ نمره) [طراح: محمد‌هادی ستوده]

این روزها اهمیت استفاده از انرژی‌های پاک بر کمتر کسی پوشیده است. حسین تصمیم گرفته است که برای حفظ محیط زیست، یک آب گرم‌کن خورشیدی با بازده ۷۰٪ برای منزلشان بسازد. برای این کار، او با استفاده از نرم‌افزار اکسل جدولی آماده کرده است که نشان می‌دهد در روز ۷ اردیبهشت، در هر ساعت از شبانه روز (بر حسب زمان محلی)، چه قدر طول می‌کشد تا دمای آب درون یک مخزن به جرم ۱۰ کیلوگرم از 20°C به 60°C افزایش یابد.

در فایل «Solar Water Heater.xlsx» می‌توانید جدولی که حسین آماده کرده است را ببینید. در هر بازه‌ی زمانی، مختصات خورشید، ثابت و برابر با مختصات در لحظه‌ی میانی بازه است.

سؤال ۱: مساحت آب گرم‌کن و عرض جغرافیایی محل نصب آن را بیابید.

نمودار H-R (نمره ۳۰) [طراح: روزبه قادری]

در فایل «H-R Diagram.xlsx» درخندگی، شعاع و دمای تعداد زیادی ستاره در دستگاه SI داده شده است.

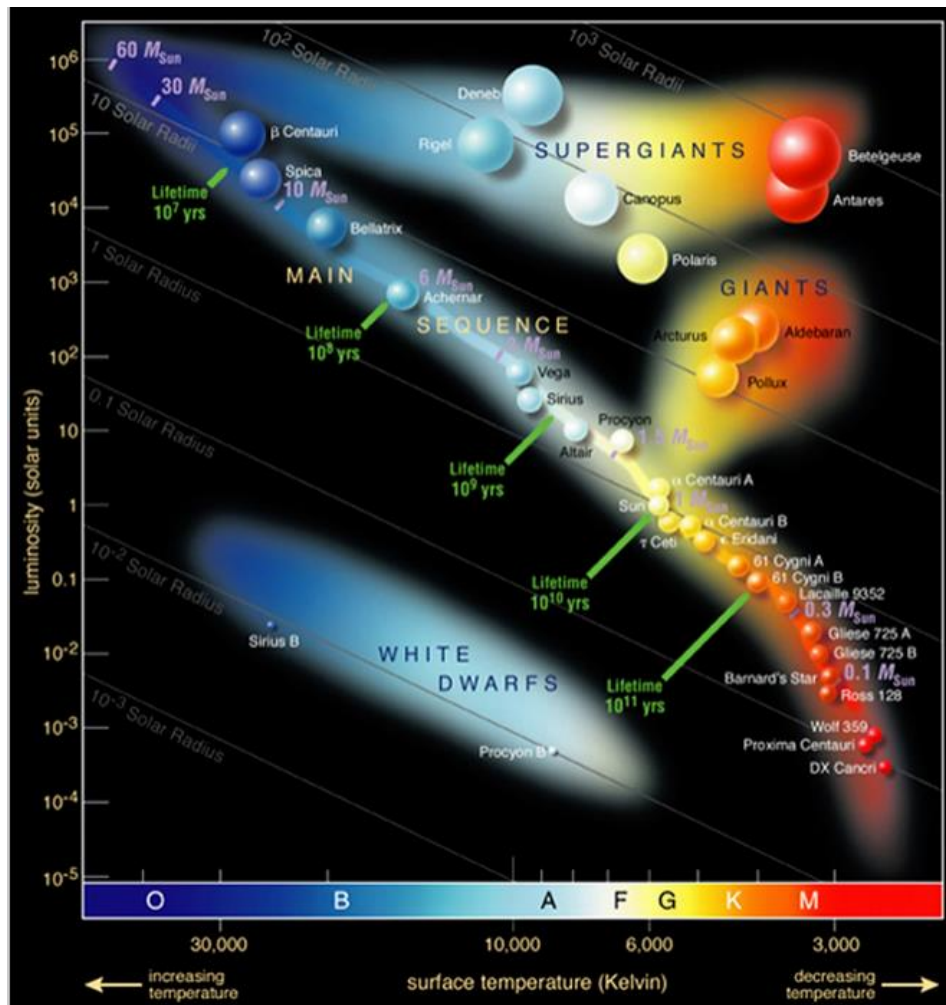
سؤال ۲: نمودار حبابی^۱ $\log_{10} \frac{L}{L_{\odot}}$ بر حسب $\log_{10} T_{\text{eff}}$ را رسم کنید. اندازه‌ی نقاط در این نمودار باید متناسب با شعاع ستاره باشد.

راهنمایی ۱: لگاریتم دما در پایه‌ی ۲ را حداقل به ۶ بازه تقسیم کرده و به هر بازه، رنگی نسبت دهید. از شکل ۱ استفاده کنید.



شکل ۱

راهنمایی ۲: در نهایت نمودار شما باید شبیه شکل ۲ باشد.



شکل ۲

ماهواره‌ها (۹۰ نمره) [طراح: محمدهادی ستوده]

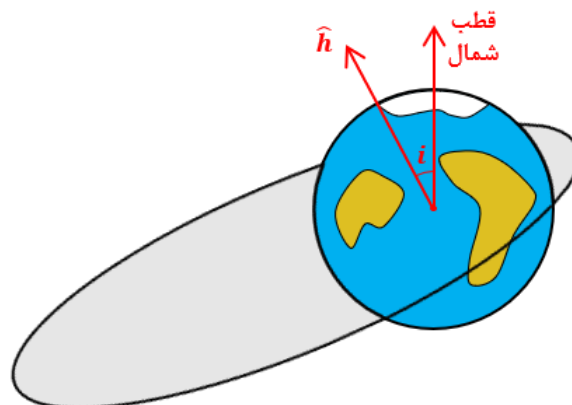
در این بخش نیازی به رعایت قواعد گزارش ارقام بامعنی نیست.

امروزه بسیاری از فعالیت‌های روزمره‌ی ما به کمک ماهواره‌ها انجام می‌شوند. علاوه بر این، استفاده از ماهواره‌ها برای مقاصد علمی، دولتی و نظامی امری ضروری است.



شکل ۳ - تصویری از آرایش ماهواره‌های LEO بر فراز زمین

فایل «Satellite_Data.txt»، اطلاعات ماهواره‌های زمینی فعال را نشان می‌دهد. این اطلاعات شامل شناسه‌ی COSPAR، شناسه‌ی NORAD، نام ماهواره، نام کشور، نوع کاربر، هدف ماهواره، ارتفاع حضيض، دوره‌ی تناوب، میل مداری، جرم در هنگام پرتاب، تاریخ پرتاب، محل پرتاب و موشک حامل ماهواره است.



شکل ۴ - نحوه‌ی اندازه‌گیری زاویه‌ی میل مداری



برای پاسخ‌گویی به سؤالات زیر، لازم است ابتدا داده‌ها را وارد یک فایل اکسل کنید.

تذکر: پاسخ‌هایتان را به گونه‌ای ذخیره کنید که با تغییر نحوه‌ی مرتب‌سازی^۱ داده‌ها، مقدار پاسخ تغییر نکند.

سؤال ۳: چه تعدادی از ماهواره‌ها در بازه‌ی زمانی ۲ فوریه ۲۰۱۶ تا ۱۶ آگوست ۲۰۱۸ به فضا پرتاب شده‌اند؟ نام و کشور این ماهواره‌ها را با استفاده از رنگ‌آمیزی شرطی به رنگ سبز مشخص کنید.

سؤال ۴: نام و مدت زمان مأموریت ۲۵ ماهواره‌ای که طولانی‌ترین مدت زمان مأموریت را دارند بنویسید. همچنین نام و مدت زمان مأموریت ۲۵ ماهواره‌ای که کوتاه‌ترین مدت زمان مأموریت را دارند بنویسید. پاسخ این قسمت را در یک کاربرگ به نام «Top 25 Oldest and Newest» ذخیره کنید. لازم است با گذر هر روز، مدت زمان مأموریت در فایل اکسل شما افزایش یابد.

سؤال ۵: به مدار ماهواره‌هایی که ارتفاعشان همواره در بازه‌ی ۴۰۰ تا ۲۰۰۰ کیلومتر قرار می‌گیرد، LEO گفته می‌شود. میانگین دوره‌ی تناوب ماهواره‌های حاضر در مدار LEO چه قدر است؟

سؤال ۶: نمودار فراوانی نسبی نیم‌قطر اطول ماهواره‌های LEO را رسم کنید.

سؤال ۷: تعداد ماهواره‌های استوایی (ماهواره‌هایی که صفحه‌ی مداریشان حداکثر 10° با استوا زاویه دارد) و ماهواره‌های قطبی (ماهواره‌هایی که میل مداریشان در بازه‌ی 85° تا 95° قرار دارد) چه قدر است؟

سؤال ۸: چند درصد از ماهواره‌های استوایی، با دقت ۱ دقیقه زمین-آهنگ هستند؟

سؤال ۹: میانگین دوره‌ی تناوب و میانگین خروج از مرکز ماهواره‌های قطبی چه قدر است؟ به نظر شما چرا مشخصات مداری این ماهواره‌ها چنین است؟

سؤال ۱۰: بازه‌ی $[10^\circ, 145^\circ]$ را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم کرده و بدون در نظر گرفتن ماهواره‌های قطبی، نمودار فراوانی زاویه‌ی میل مداری ماهواره‌ها را در این بازه رسم کنید. کدام بازه بیشترین تعداد ماهواره‌ها را دارد؟

سؤال ۱۱: چند درصد ماهواره‌هایی که میل مداریشان در بازه‌ی ۶۰ تا ۷۰ درجه است، دارای خروج از مرکز بیشتر از 0.3 هستند؟ نوع کاربر^۲ و هدف^۳ این ماهواره‌ها را با استفاده از رنگ‌آمیزی شرطی به رنگ آبی مشخص کنید. کاربران این ماهواره‌ها عمدتاً چه نهادهایی هستند؟

^۱ Sort

^۲ User

^۳ Purpose

گردشگری (۱۲۰ نمره) [طراح: روزبه قادری]

در این بخش نیازی به رعایت قواعد گزارش ارقام بامعنی نیست.

نقی که به تازگی در مرکز ملی گردشگری استخدام شده است تصمیم می‌گیرد نیم‌کره‌ی شمالی کره‌ی خاکی را با قاعده‌ی جالبی کنکاش کند. قاعده‌ی نقی بدین صورت است که او سعی می‌کند وسیله‌ی نقلیه‌اش در هر لحظه با راستای شمال زاویه‌ی ۳۳ درجه بسازد. جهت حرکت او به مشرق است و نقطه‌ی پایان سفرش قطب شمال است. سرعت متوسط او ۵۰ کیلومتر بر ساعت است! او در ساعت ۱۲:۰۰:۰۰ روز اول آذر ساعت مچی خود را تنظیم می‌کند و از شهری با عرض جغرافیایی ۰ درجه و طول جغرافیایی ۷۵ درجه‌ی غربی سفر خود را آغاز می‌کند. برای محاسبات و رسم نمودار، از فایل «Naghi.xlsx» استفاده کنید.

نقی برای این که مسیر تقریبی حرکتش را به دست بیاورد، مدت زمان حرکت را به بازه‌های کوچک تقسیم کرده و در هر بازه مسیر را محاسبه می‌کند.

سؤال ۱۲: مدت زمان مسافرت نقی را بیابید. برای تعیین مختصات نقی در هر لحظه با دقت مناسب، بازه‌های زمانی را باید چه قدر در نظر گرفت؟

برای عرض‌های جغرافیایی بیشتر از ۸۸ درجه، مقدار بازه‌ی زمانی را $\frac{1}{10}$ کنید تا مسیر با دقت بیشتری مشخص شود.

سؤال ۱۳: نقی در چه تاریخ و ساعتی به پایان سفر خود می‌رسد؟ سفر او چند کیلومتر بوده است؟

سؤال ۱۴: نمودار قطبی مسیر نقی را رسم کنید.

برای اینکه بتوان مسیر نقی را در نقشه‌ی کره زمین ملاحظه کرد از تسطیح Eckert IV استفاده می‌کنیم. در این تسطیح طول و عرض جغرافیایی (l و ϕ) با استفاده از روابط زیر به مختصات دکارتی تبدیل می‌شوند.

$$x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{R}{\sqrt{4 + \pi}} l (1 + \cos \theta) \quad , \quad y = 2\sqrt{\pi} \frac{R}{\sqrt{4 + \pi}} \sin \theta$$

$l \in (-\pi, \pi]$ است و زاویه‌ی کمکی (θ) از رابطه‌ی

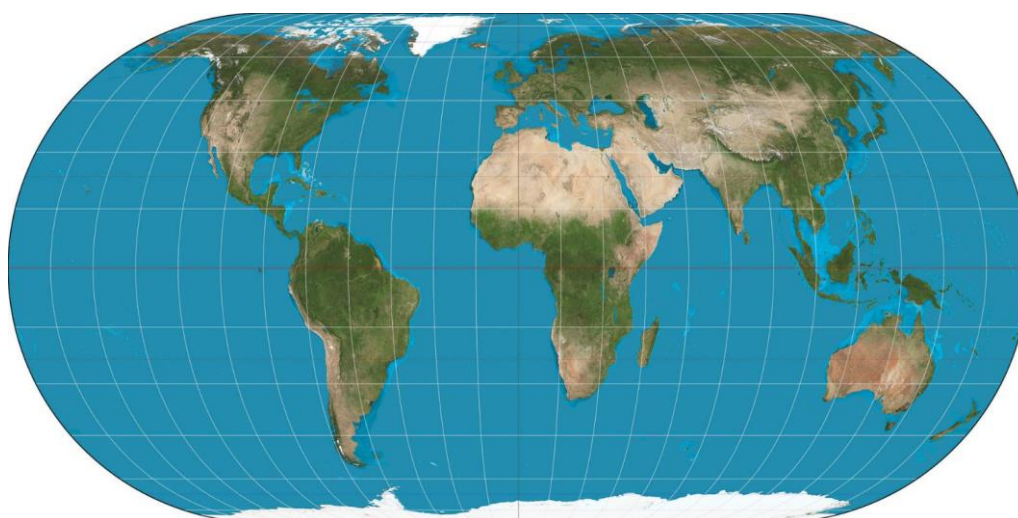
$$\theta + \sin \theta \cos \theta + 2 \sin \theta = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) \sin \phi$$

به دست می‌آید. $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ است. شعاع کره‌ی تسطیح شده (R) را ۱۰ در نظر بگیرید.

در کاربرگ «World Map» یک نقشه‌ی جهان با تسطیح Eckert IV قرار داده شده است.

تذکر: از به هم زدن تنظیمات محورهای نقشه‌ی جهان خودداری کنید.

سؤال ۱۵: مسیر نقی را در نقشه‌ی جهان رسم کنید.



شکل ۵ - نقشه‌ی جهان با تسطیح Eckert IV

از آنجایی که نقی بسیار دقیق است و می‌خواهد تمامی برنامه‌ریزی‌ها را به کمک دخترانش انجام دهد، باید بداند که در هر لحظه از سفر به چه وسیله‌ی نقلیه‌ای نیاز دارد (کشتی یا ماشین) تا دخترانش بتوانند برای او بلیط تهیه کنند.

به دلیل یخ‌زدگی اقیانوس و و بارش برف در نواحی قطبی، نقی در عرض‌های جغرافیایی بیشتر از ۷۰ درجه مجبور به اسکی می‌شود (نه ماشین و نه کشتی!). در عرض جغرافیایی ۷۰ درجه هیچ بندری وجود ندارد.

سؤال ۱۶: او در سفر خود در کدام مناطق ساحلی مجبور به کشتی سواری می‌شود؟ مختصات جغرافیایی بنادر مبدأ و مقصد را در پاسخنامه نوشته و آن‌ها را در نقشه‌ی جهان (کاربرگ World Map) با علامت ■ مشخص کنید.

سؤال ۱۷: تاریخ و ساعت حرکت بلیط(های) کشتی نقی بر حسب زمان نشان داده شده در ساعت مچی او چه هستند؟ دقت شود در بلیط تنها تاریخ و ساعت شروع حرکت درج می‌شود.

سؤال ۱۸: نقی در کدام طول جغرافیایی، تاریخ و ساعت چوب‌های اسکی خود را به پا می‌کند؟ این نقطه را در نقشه‌ی جهان با علامت + مشخص کنید. او چند کیلومتر و به چه مدتی اسکی می‌کند؟

غلام که مجدداً همکار نقی شده است می‌خواهد او را غافلگیر کرده و در بین راه ملاقاتش کند. غلام برای بالا رفتن هیجان، مسیر خود را طبق قاعده‌ی نقی تنظیم می‌کند؛ با این تفاوت که از تهران شروع به حرکت کرده و زاویه‌ی مسیرش با شمال، ۸۵ درجه است. او نیز به سمت مشرق حرکت می‌کند و سرعتش همان ۵۰ کیلومتر بر ساعت است.

سؤال ۱۹: مسیر غلام را به نقشه‌ی جهان بیفزایید. نقاط حرکت را با رنگ دیگری مشخص کنید. نمودار را تا جایی رسم کنید که طول جغرافیایی غلام ۳۶۰ درجه تغییر کند؛ یا به عبارتی او یک دور بزند.

سؤال ۲۰: اولین تقاطع مسیر غلام و نقی در کدام طول و عرض جغرافیایی قرار دارد؟ این نقطه را در نقشه‌ی جهان با علامت X مشخص کنید. تاریخ و ساعت حرکت غلام را طوری مشخص کنید که بتواند نقی را در این نقطه ملاقات کند.



ثوابت فیزیکی و نجومی

مقدار	کمیت
$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$	G ثابت جهانی گرانش
$1.50 \times 10^{11} \text{ m}$	AU واحد نجومی
$3.09 \times 10^{16} \text{ m}$	pc پارسک
$3.85 \times 10^{26} \text{ W}$	L_{\odot} درخشندگی خورشید
$1.99 \times 10^{30} \text{ kg}$	M_{\odot} جرم خورشید
$6.96 \times 10^8 \text{ m}$	R_{\odot} شعاع خورشید
$5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$	M_{\oplus} جرم زمین
6378 km	R_{\oplus} شعاع زمین
$23^{\circ}/4$	ε تمایل محوری زمین
86164 s	دوره‌ی تناوب نجومی زمین
25800 yr	دوره‌ی تناوب حرکت تقدیمی زمین
$35^{\circ}/7$	ϕ_T عرض جغرافیایی تهران
$51^{\circ}/4$	l_T طول جغرافیایی تهران
$4200 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$	ظرفیت گرمایی ویژه‌ی آب

روابط برازش خطّ راست

$$y = Bx$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

$$y = A + Bx$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad A = \bar{y} - B\bar{x}$$

راهنمای رسم نمودار حبابی در اکسل



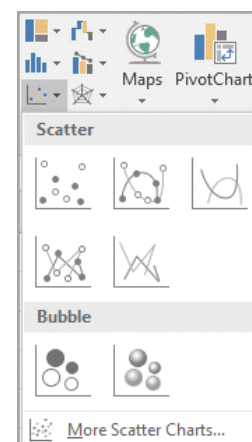
	A	B	C
1	Number of Products	Sales	Percentage of Market Share
2	5	\$5,500	3%
3	14	\$12,200	12%
4	20	\$60,000	33%
5	18	\$24,400	10%
6	22	\$32,000	42%

Note: Make sure that your worksheet has at least four rows or columns of data. When you create a bubble chart from three or fewer rows or columns of data, the chart does not plot the bubbles correctly.

1. Select the data that you want to plot in the bubble chart.

Note: It is best not to include row or column headings in the selection. If you select the headings with your data, the chart may produce incorrect results.

2. On the **Insert** tab, in the **Charts** group, click the arrow next to **Scatter Charts**.
3. Select the bubble with the 3-D effect icon.





وزارت آموزش و پرورش

مرکز ملی پرورش استعدادهای درخشان و دانش‌پژوهان جوان

مبارزه‌ی علمی برای جوانان، زنده کردن روح جست‌وجو و کشف واقعیت‌هاست. «امام خمینی(ره)»



چهاردهمین دوره‌ی طلای المپیاد نجوم و اخترفیزیک
آزمون‌های پایانی

آزمون تحلیل داده ۲

(۹ اردیبهشت ۱۳۹۸ - ساعت ۸:۰۰ تا ۱۳:۱۵)

توجه: بارم سؤالات متفاوت است.

این صفحه عمدتاً خالی گذاشته شده است.

کهکشان [HB 89]0567+315 (۱۰۰ نمره) [طراح: امیرعلی اختراعی و روزبه قادری]

هدف از این بخش بررسی درخشندگی ناحیه‌ی برآمدگی^۱ کهکشان مارپیچی [HB 89]0567+315 است. مدول فاصله‌ی یک ابرنواختر نوع Ia که در این کهکشان دیده شده $\mu = 31.67 \pm 0.15$ است. همچنین با تحلیل خطوط نشری ابرنواختر، قرمزگرایی $z = 0.234 \pm 0.003$ به دست آمده است. اثرات مربوط به سرعت چرخش ابرنواختر حول مرکز کهکشان حذف شده است.

سؤال ۱: فاصله‌ی قطر زاویه‌ای (d_A) را به همراه خطا گزارش کنید.

پراکندگی سرعت شعاعی ستاره‌های محدوده‌ی برآمدگی کهکشان برابر با مقدار زیر است.

$$\sigma_r = \sqrt{\langle v_r^2 \rangle} = 10.5/5 \pm 0.4 \text{ km s}^{-1}$$

با یک CCD با وضوح^۲ ۲۲ مگاپیکسل و ابعاد $5 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$ که روی تلسکوپی با قدر حدی $m = 19.6 \pm 0.4$ و نسبت کانونی $F/3.5$ نصب شده است، تصویری تهیه کرده‌ایم. در این تصویر، مرکز کهکشان منطبق بر مرکز CCD است و کهکشان به صورت رخ‌نما^۳ دیده می‌شود.

سؤال ۲: اگر برآمدگی کهکشان ۱۵٪ از میدان دید CCD را پر کند، جرم دینامیکی برآمدگی کهکشان را به همراه خطا گزارش کنید.

بررسی ناحیه‌ی برآمدگی کهکشان

برای ناحیه‌ی برآمدگی کهکشان، قدر سطحی تصحیح شده (اثرات جذب میان ستاره‌ای حذف شده است) μ را برای فاصله‌های زاویه‌ای مختلف r از مرکز به دست آورده و در جدول ۱ وارد کرده‌ایم. دقت شود r بر حسب ثانیه‌ی قوسی است.

سؤال ۳: ثابت کنید روشنایی سطحی نور رسیده از منبع به ما با قرمزگرایی کیهانشناختی به صورت زیر کم می‌شود.

$$I = \frac{I_0}{(1+z)^4}$$

^۱ Bulge^۲ Resolution^۳ Face-on

جدول ۱

#	r (arcsec)	μ ($\frac{\text{mag}}{\text{arcsec}^2}$)
۱	۲/۱	۱۸/۹۵
۲	۸/۹	۲۰/۵۱
۳	۱۷/۸	۲۱/۴۲
۴	۲۵/۶	۲۱/۹۲
۵	۳۳/۲	۲۲/۴۵
۶	۴۱/۲	۲۲/۷۴
۷	۵۰/۹	۲۳/۱۴
۸	۶۲/۷	۲۳/۵۴
۹	۷۴/۱	۲۳/۹۱
۱۰	۸۵/۵	۲۴/۲۹

طبق قانون $r^{1/n}$

$$\log \frac{I_o(r)}{I_o(r_e)} = -A \left[\left(\frac{r}{r_e} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 \right]$$

است که در آن r_e شعاع نیم‌نور^۱ است. ثابت A از روی تعریف r_e به دست می‌آید و تقریباً با n رابطه‌ای ندارد. در این مسئله فرض کنید $A = ۳/۳۳۱$ است.

سؤال ۴: می‌دانیم که I_o از قانون $r^{1/n}$ پیروی می‌کند. کدام یک از مقادیر n زیر بهترین همبستگی را با داده‌های سؤال دارد؟ منظور از بهترین همبستگی، بیشترین مقدار رگرسیون، $|r|$ ، است. در برازش از خطای داده‌ها صرف نظر کنید.

$$\frac{1}{n} = ۰/۲۵$$

$$\frac{1}{n} = ۰/۵۰$$

سؤال ۵: $I_o(r_e)$ و r_e را به ازای پاسخ سؤال قبل، به همراه خطا گزارش کنید.

^۱ درخشندگی مجموع از مرکز تا فاصله‌ی r_e برابر با نصف درخشندگی برآمدگی است.



سؤال ۶: نمودار $2\pi R \times I_o(R)$ بر حسب R را برای ۱۵ داده، در بازه‌ی $R = [0, R_e]$ رسم کنید (R فاصله‌ی فیزیکی از مرکز کهکشان است). برای این کار باید کل بازه را به ۱۴ قسمت مساوی تقسیم کنید.

سؤال ۷: با استفاده از نمودار سؤال قبل، درخشندگی برآمدگی را حساب کنید. برای محاسبه‌ی سطح زیر نمودار از روش انتگرال‌گیری ذوزنقه‌ای استفاده کنید.

سؤال ۸: نسبت جرم به درخشندگی برآمدگی کهکشان چه قدر است؟

تلسکوپ رادیویی SKA1-low^۱ (۱۳۰ نمره) [طراح: شهاب‌الدین محین]

تلسکوپ رادیویی SKA1-low در استرالیا واقع است. این تلسکوپ رادیویی شامل آرایه‌ای از آنتن‌ها است که در بازه‌ی فرکانسی ۵۰ تا ۳۵۰ مگاهرتز کار می‌کند. «آرایه‌های فازی» تکنیکی است که در قرن بیستم میلادی در صنعت راداری کمک بسیاری به کشورها کرد و اکنون در بسیاری از حوزه‌ها مثل پزشکی، رادیو تلسکوپ‌ها، مخابرات ماهواره‌ای، نسل پنجم تلفن همراه^۲ و ... مورد استفاده قرار گرفته است.

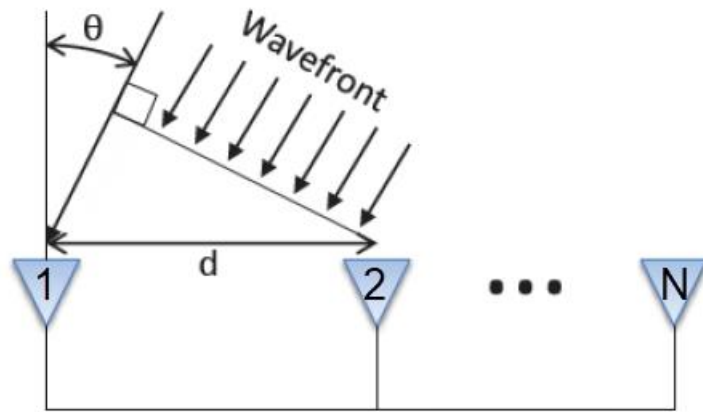


شکل ۱

در شکل زیر آرایه‌ی خطی از آنتن‌ها را مشاهده می‌کنید که تمامی آنتن‌ها روی یک خط با فاصله‌ی مساوی d از هم قرار گرفته‌اند. فرض کرده‌ایم که آنتن‌ها به صورت نقطه‌ای هستند و شکل دیش یا... ندارند؛ یعنی می‌توانند در تمام جهات سیگنال دریافت یا گسیل کنند.

^۱ <https://spectrum.ieee.org/aerospace/astrophysics/far-from-radio-interference-the-square-kilometre-array-takes-root-in-south-africa-and-the-australian-outback>

^۲ 5G



شکل ۲

سؤال ۹: فرض کنید در شکل ۲ طول موج تابش شده به آنتن‌ها برابر با λ_0 و $d = \frac{\lambda_0}{2}$ باشد. اثبات کنید که اختلاف فاز بین سیگنال هر دو آنتن مجاور، مطابق رابطه‌ی زیر است.

$$\alpha = \pi \sin \theta$$

سؤال ۱۰: بنابراین اگر فرض کنیم که سیگنال دریافت شده در آنتن اول برابر با $y_1(t) = A \cos \omega_0 t$ باشد، آنگاه سیگنال دریافت شده در آنتن k ام برابر با $y_k(t) = A \cos(\omega_0 t + (k-1)\alpha)$ می‌باشد که $\omega_0 = 2\pi f_0$ است. حال اثبات کنید که برآیند تمام سیگنال‌های دریافتی از آنتن‌ها مطابق زیر است.

$$y(t) = \sum_{k=1}^N y_k(t) = A \cos \left(\omega_0 t + \frac{N-1}{2} \alpha \right) \frac{\sin \left(N \frac{\alpha}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\alpha}{2} \right)}$$

سؤال ۱۱: فرض کنید که سیگنال هر کدام از آنتن‌ها را مانند روابط زیر در حوزه‌ی زمان نسبت به آنتن مجاورش به اندازه- $\frac{\psi}{2\pi f_0}$ شیفت داده‌ایم.

$$\begin{cases} z_N(t) = y_N(t) \\ z_{N-1}(t) = y_{N-1} \left(t - \frac{\psi}{2\pi f_0} \right) \\ \vdots \\ z_1(t) = y_1 \left(t - (N-1) \frac{\psi}{2\pi f_0} \right) \end{cases}$$

حال اثبات کنید که برآیند تمام سیگنال‌های دریافتی از آنتن‌ها مطابق زیر است.

$$z(t) = \sum_{k=1}^N z_k(t) = A \cos \left(\omega_0 \left(t - (N-1) \frac{\psi}{\omega_0} \right) + \frac{N-1}{2} (\alpha + \psi) \right) \frac{\sin \left(N \frac{\alpha + \psi}{2} \right)}{\sin \left(\frac{\alpha + \psi}{2} \right)}$$



سؤال ۱۲: فرض کنید که $N = 5$ است. اگر $\psi = 0$ باشد، نمودار $f(\alpha)$ بر حسب α را به ازای α های داده شده در جدول زیر رسم کنید. $f(\alpha)$ مطابق زیر تعریف شده است که متناسب با دامنه ی سیگنال بالا است.

$$f(\alpha) = \left| \frac{\sin\left(N \frac{\alpha + \psi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha + \psi}{2}\right)} \right|$$

جدول ۲

#	$\alpha (^{\circ})$
۱	-۱۸۰
۲	-۱۶۲
۳	-۱۴۴
۴	-۱۲۶
۵	-۱۰۸
۶	-۹۰
۷	-۷۲
۸	-۵۴
۹	-۳۶
۱۰	-۱۸
۱۱	۰
۱۲	۱۸
۱۳	۳۶
۱۴	۵۴
۱۵	۷۲
۱۶	۹۰
۱۷	۱۰۸
۱۸	۱۲۶
۱۹	۱۴۴
۲۰	۱۶۲
۲۱	۱۸۰



سؤال ۱۳: بیشینه‌ی نمودار، در کدام α قرار دارد؟ این α معادل با کدام θ در فضا است؟

سؤال ۱۴: فرض کنید که $N = 5$ است. اگر $\psi = \frac{\pi}{4}$ rad باشد، در همان نمودار قسمت قبل، نمودار $f(\alpha)$ بر حسب α را به ازای α های داده شده در جدول ۲ رسم کنید.

سؤال ۱۵: برای نمودار سؤال قبل، بیشینه‌ی نمودار در کدام α قرار دارد؟ این α معادل با کدام θ در فضا است؟

همان طور که مشاهده می‌کنید ما توانستیم بدون آن که به صورت فیزیکی آنتن را بچرخانیم، زاویه‌ی دریافت سیگنال‌های رادیویی را تغییر دهیم. در تلسکوپ‌های قدیمی برای دریافت سیگنال از یک جسم نجومی باید تلسکوپ (آنتن) را به سمت آن جسم قرار می‌دادیم اما در تلسکوپ‌های رادیویی امروزی آنتن‌ها ثابت هستند و با ایجاد کردن اختلاف فاز به صورت الکترونیکی قابلیت تنظیم دقیق جهت دریافت سیگنال را داریم.

سؤال ۱۶: ۵ آنتن فوق را بر روی زمین در راستای جنوب به شمال در عرض جغرافیایی ϕ قرار داده‌ایم طوری که آنتن ۱ نزدیک به شمال و آنتن ۵ نزدیک به جنوب است. برای چه مجموعه نقاطی در آسمان، اختلاف فاز بین سیگنال‌های دریافت شده در آنتن‌ها از آن نقطه در آسمان برابر با صفر است؟

سؤال ۱۷: حال شروع به رهگیری یک کهکشان با میل δ در آسمان می‌کنیم و برای هر لحظه مقدار زاویه ساعتی (H) و ψ را گزارش می‌کنیم. اثبات کنید که رابطه‌ی زیر برقرار است.

$$\frac{\psi}{\pi} = \cos \phi \sin \delta - \sin \phi \cos \delta \cos H$$

سؤال ۱۸: با توجه به مقادیر زاویه ساعتی (H) و ψ گزارش شده در جدول ۳، میل کهکشان و عرض جغرافیایی رصدگر را به همراه خطا بدست آورید.



جدول ۳

#	H (h)	ψ (rad)
۱	۰	$-۱/۷۵۷$
۲	۱	$-۱/۶۷۵$
۳	۲	$-۱/۴۳۵$
۴	۳	$-۱/۰۵۳$
۵	۴	$-۰/۵۵۵$
۶	۵	$۰/۰۲۴$
۷	۶	$۰/۶۴۶$
۸	۷	$۱/۲۶۸$
۹	۸	$۱/۸۴۷$
۱۰	۹	$۲/۳۴۵$
۱۱	۱۰	$۲/۷۲۶$
۱۲	۱۱	$۲/۹۶۶$
۱۳	۱۲	$۳/۰۴۸$



ثوابت فیزیکی و نجومی

مقدار	کمیت
$6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$	G ثابت جهانی گرانش
$6.63 \times 10^{-34} \text{ J s}$	h ثابت پلانک
$3.00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$	c سرعت نور
$3.09 \times 10^{16} \text{ m}$	pc پارسک
$1.50 \times 10^{11} \text{ m}$	AU واحد نجومی
1367 W m^{-2}	F_{\odot} ثابت خورشیدی
-26.74	m_{\odot} قدر ظاهری خورشید
8 mm	D_{eye} قطر مردمک چشم انسان
$6/5$	m_{eye} قدر حدی چشم انسان

روابط برازش خطّ راست

$$y = Bx$$

$$d_i = y_i - Bx_i$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N x_i y_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

$$(\Delta B)^2 \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-1}$$

$$y = A + Bx$$

$$d_i = y_i - (A + Bx_i)$$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N y_i (x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \quad A = \bar{y} - B\bar{x}$$

$$(\Delta B)^2 \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-2}$$

$$(\Delta A)^2 \approx \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \right) \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-2}$$

الف

قراردادها و روابط اصلی تحلیل داده

۱. گزارش عدد به همراه خطا

مرحله ۱ اول: تعیین ارقام بامعنی خطا

در صورتی که بامعنا ترین رقم خطا (رقم سمت چپ) ۱ یا ۲ باشد، دو رقم بامعنی سمت چپ و در غیر این صورت، فقط رقم سمت چپ را انتخاب می کنیم.

مرحله ۲ دوم: تعیین ارقام بامعنی عدد

از سمت چپ عدد شروع کرده و ارقام را تا جایی که ارزش رقم سمت راست عدد و رقم سمت راست خطا یکسان باشد، انتخاب می کنیم.

$$۲۱۳/۱۴ \pm ۰/۳۷۵$$



$$۲۱۳/۱۴ \pm ۰/۴$$



$$۲۱۳/۱ \pm ۰/۴$$

$$۰/۹۵۴۶ \pm ۱/۲۷۳$$



$$۰/۹۵۴۶ \pm ۱/۲۷$$



$$۰/۹۵ \pm ۱/۲۷$$

شکل ۱- مثال

* برای حذف ارقام کم معنا، آخرین رقم بامعنا را طبق قاعده ی زوج گرایمی گرد می کنیم.

۲. خطای کمیت‌های اولیه

$$\text{err} = \max(\sigma_m, \delta_{\text{sys}})$$

σ_m انحراف معیار میانگین و δ_{sys} دقت وسیله‌ی اندازه‌گیری است.

۳. محاسبه‌ی کمیت‌های ثانویه و خطای آن‌ها

* فرمول نشر خطا (محاسبه‌ی خطای $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$):

$$\delta y = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \delta x_1\right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n} \delta x_n\right)^2}$$

رابطه‌ی نشر خطا

* گزارش عدد بدون خطا (قاعده‌ی سرانگشتی)

قاعده‌ی جمع: تعداد ارقام اعشار حاصل جمع یا تفریق برابر با تعداد ارقام اعشار عددی است که کمترین اعشار را دارد.

قاعده‌ی ضرب: تعداد ارقام بامعنی حاصل ضرب یا تقسیم برابر با تعداد ارقام بامعنی عددی است که کمترین ارقام بامعنی را دارد.

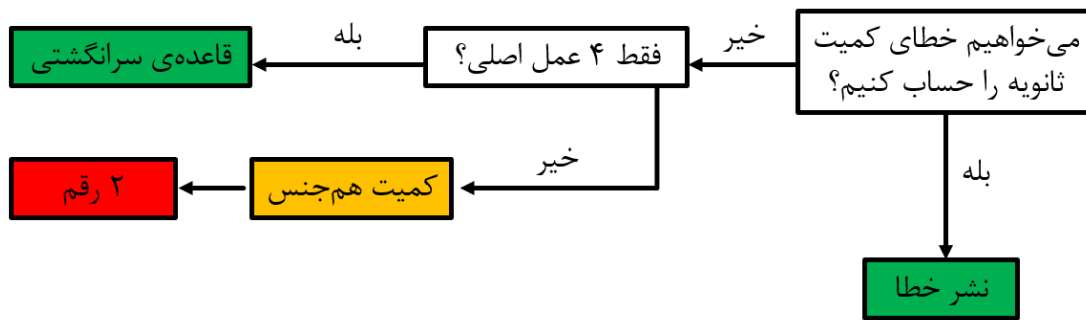
$$\begin{array}{r} \bigcirc\bigcirc/\bigcirc\boxed{?}\boxed{?} \\ + \quad \bigcirc/\bigcirc\bigcirc\bigcirc\bigcirc \\ \hline \bigcirc\bigcirc/\bigcirc\boxed{?}\boxed{?} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \bigcirc/\bigcirc\boxed{?} \\ \times \quad \bigcirc/\bigcirc\bigcirc\boxed{?} \\ \hline \end{array}$$

ارزش بیشتر، تأثیر بیشتر

شکل ۲- قاعده‌ی سرانگشتی ضرب (سمت راست) و جمع (سمت چپ)

۴. نمودار گزارش عدد و خطا



شکل ۳

* منظور از کمیت هم‌جنس، کمیتی با بُعد فیزیکی یکسان است.

* منظور از ۲ رقم، این است که عدد را به گونه‌ای گزارش کنیم که نمایش نماد علمی آن دو رقم اعشار داشته باشد.

۵. انواع واریانس

$$\sigma_s^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

واریانس نمونه	واریانس
---------------	---------

از انحراف معیار نمونه (σ_s) برای گزارش خطای اندازه‌گیری استفاده می‌شود. برای گزارش خطای میانگین اندازه‌گیری‌ها باید از انحراف معیار میانگین استفاده کنیم.

$$\sigma_m^2 = \frac{1}{N} \sigma_s^2$$

واریانس میانگین

ترکیب اندازه گیری‌ها:

برای ترکیب اندازه گیری‌هایی که انحراف معیارشان با یک دیگر برابر نیست، از رابطه ی زیر استفاده می کنیم.

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} x_i \bigg/ \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2} \quad \sigma_m^2 = 1 \bigg/ \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i^2}$$

روابط ترکیب اندازه گیری‌ها

۶. روابط برازش خط

$$A = \bar{y} - B\bar{x} \quad B = \frac{\sum_{i=1}^N y_i(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}$$

$$(\Delta A)^2 \approx (\Delta B)^2 \bar{x}^2 \quad (\Delta B)^2 \approx \frac{B^2}{N-2} \left(\frac{1}{\bar{x}^2} - 1 \right)$$

$$d_i = y_i - (A + Bx_i)$$

$$(\Delta A)^2 \approx \left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \right) \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-2}$$

$$(\Delta B)^2 \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-2}$$

معادله ی خط: $y = A + Bx$

$$B = \frac{\sum_{i=1}^N y_i x_i}{\sum_{i=1}^N x_i^2}$$

$$d_i = y_i - Bx_i$$

$$(\Delta B)^2 \approx \frac{1}{\sum_{i=1}^N x_i^2} \frac{\sum_{i=1}^N d_i^2}{N-1}$$

معادله خط: $y = Bx$

ضریب همبستگی خطی (رگرسیون):

$$r = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}}$$

۷. قواعد جدول و نمودار

شرایط تشکیل جدول:

برای گزارش مجموعه‌ای از داده‌ها از جدول استفاده می‌شود.

اجزای نمودار:

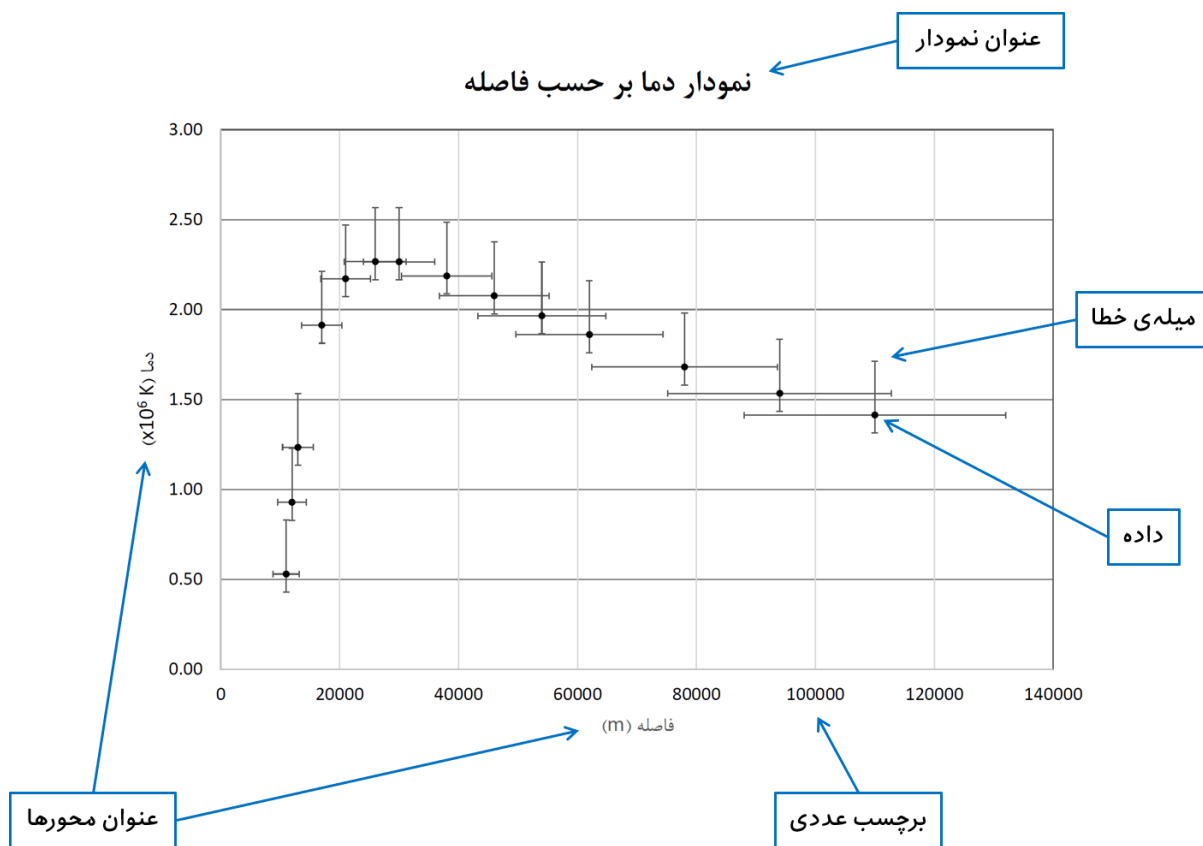
عنوان نمودار، عنوان محورها (به همراه واحد)، برچسب‌های عددی (حداقل ۳ نقطه از هر محور)،

داده‌ها، میله‌های خطا (در صورت لزوم)

* لازم است برای هر محور، مقیاس مناسب (خطی یا لگاریتمی) انتخاب شود.

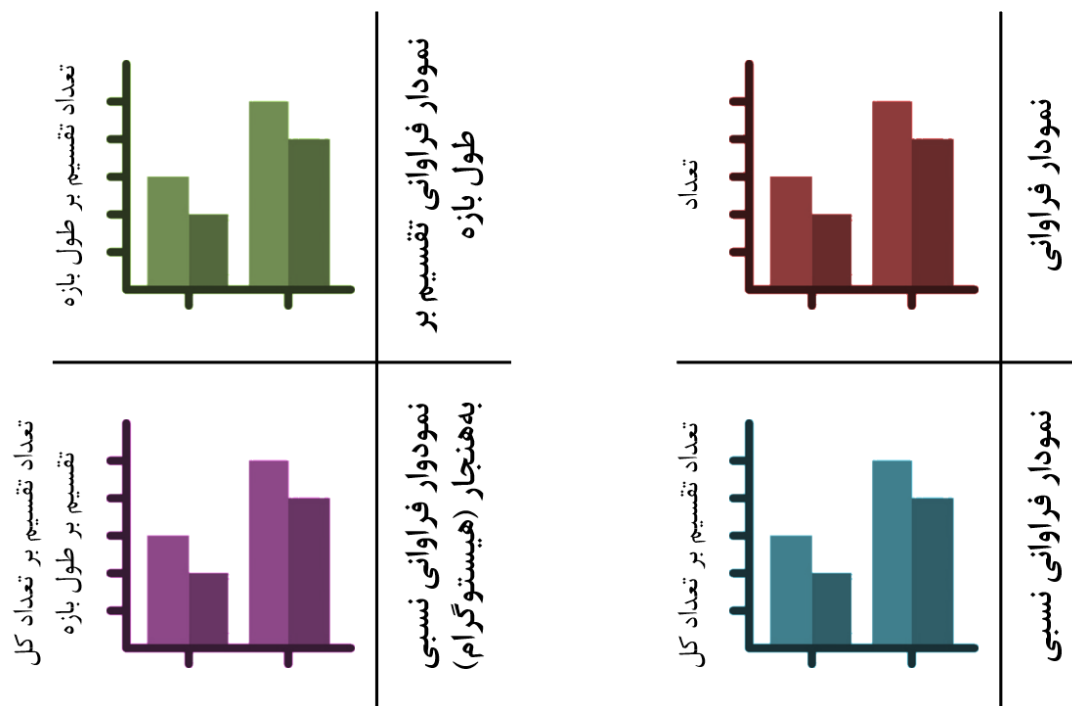
* اندازه‌ی نقاط داده باید خیلی کوچک یا خیلی بزرگ نباشد.

* لازم است بین نقاط و لبه‌های نمودار فاصله‌ی مناسب رعایت شود.

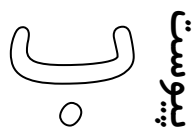


شکل ۴ - اجزای نمودار

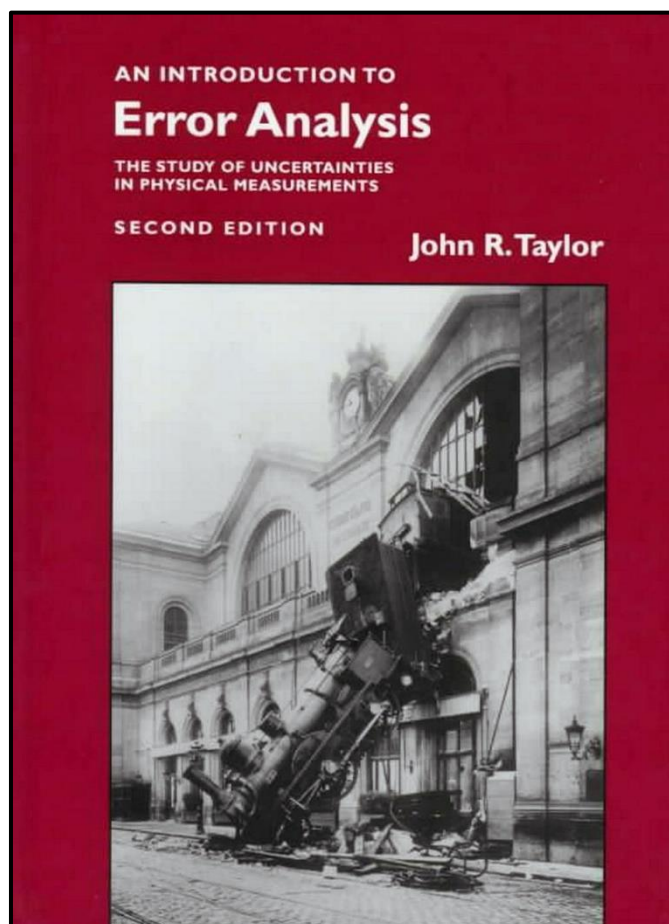
تعاریف مربوط به نمودار فراوانی:



شکل ۵ - انواع نمودار فراوانی



معرفی منبع اصلی درس تحلیل داده

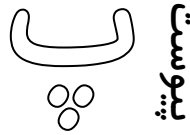


عنوان کتاب: An Introduction to Error Analysis

نویسنده: John Taylor

انتشارات: University Science Books

برای تدریس تحلیل داده در دوره‌ی طلا، از فصل‌های ۱ تا ۵، ۷ و ۸ این کتاب استفاده شده است.

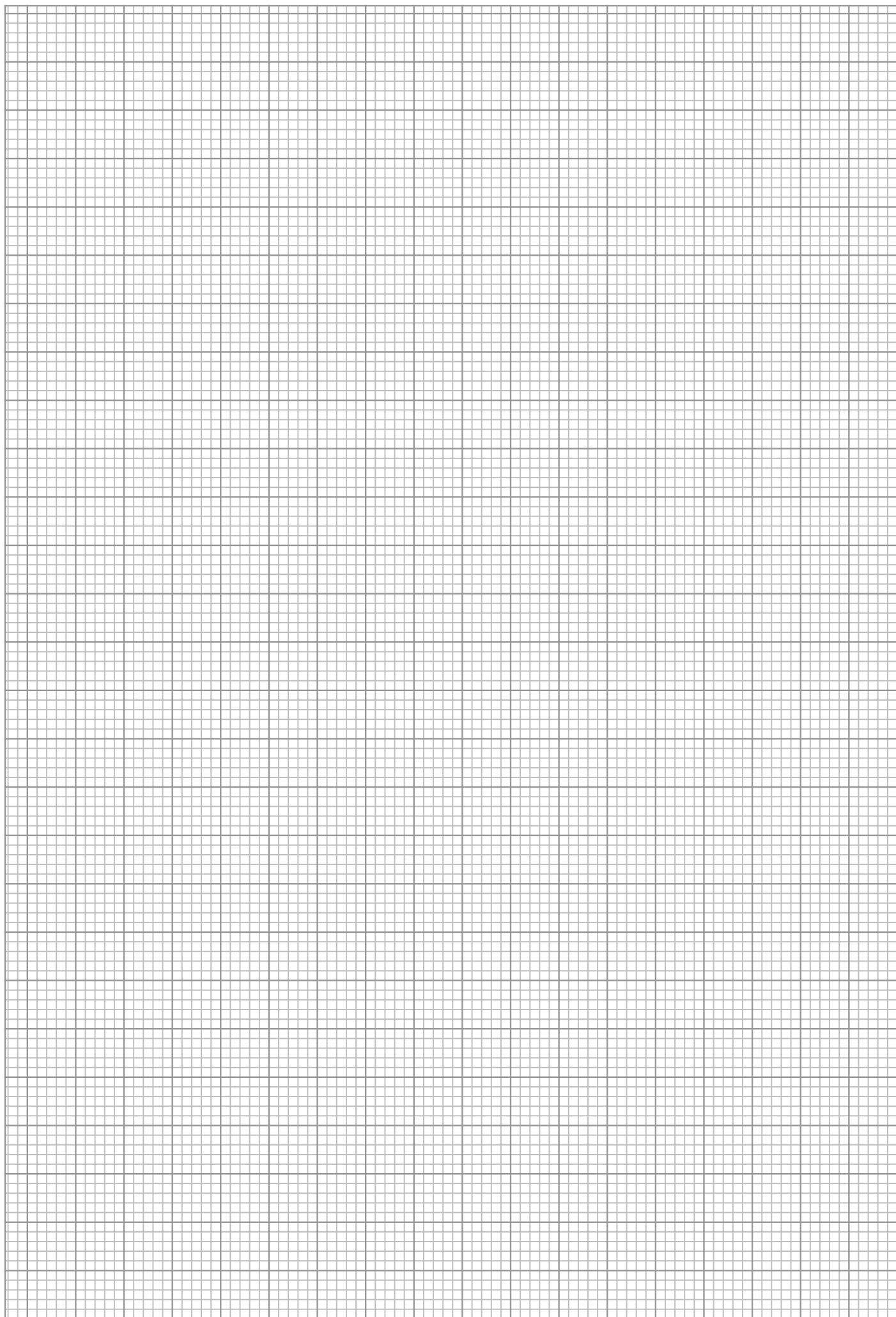


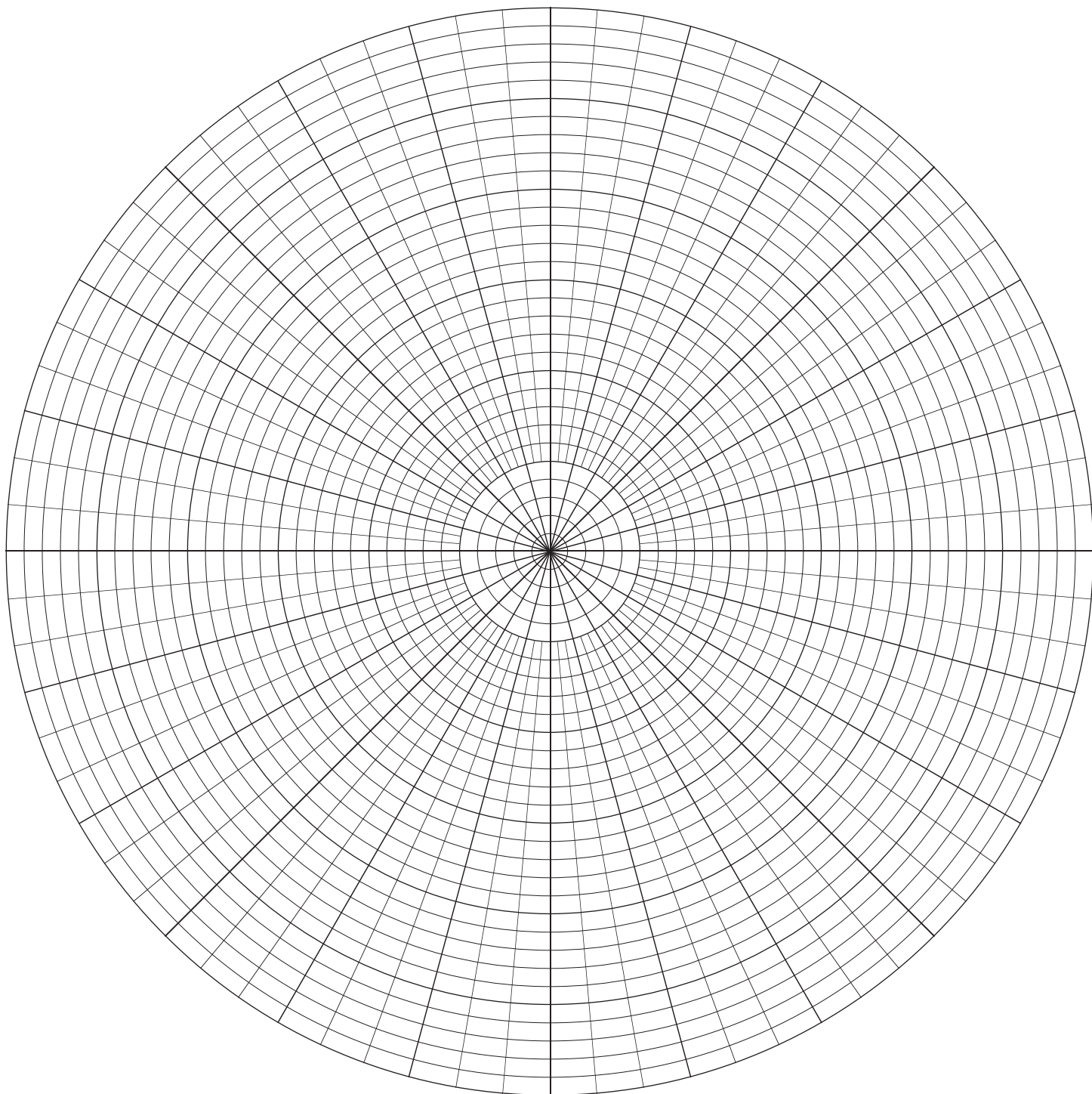
کاغذهای رسم نمودار

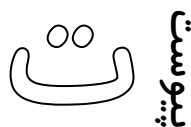
انواع کاغذ رسم نمودار عبارت‌اند از:

کاغذ میلی‌متری، کاغذ شطرنجی، کاغذ لگاریتمی، کاغذ قطبی و کاغذ ایزومتر

برای تهیه کاغذ میلی‌متری می‌توانید به فروشگاه‌های نوشت‌افزار مراجعه کنید. نمونه کاغذ شطرنجی و کاغذ قطبی در ادامه آورده شده است. برای حل سؤالات این مجموعه می‌توانید از آن‌ها استفاده کنید.







جدول وسایل، کاغذها و فایل های مورد نیاز

تمامی وسایل مورد نیاز برای برگزاری آزمون های این مجموعه در جدول زیر آورده شده است.

توجه: کاغذهای لگاریتمی در انتهای هر آزمون قرار دارند.

ردیف	دوره	عنوان آزمون	وسایل مورد نیاز
۱	دوره ی طلای ۱۰	تحلیل داده با اکسل ۱	فایل های آزمون: http://9thioaa.ir/?download=737
۲		تحلیل داده با اکسل ۱	فایل های آزمون: http://9thioaa.ir/?download=734
۳		پایانی تحلیل داده	۳ کاغذ میلی متری
۴	دوره ی طلای ۱۱	مفاهیم پایه ی تحلیل داده	۲ کاغذ میلی متری
۵		میان دوره ی تحلیل داده	۲ کاغذ میلی متری، ۱ کاغذ قطبی
۶		تحلیل داده با اکسل	فایل های آزمون: http://9thioaa.ir/?download=731
۷	دوره ی تابستانی ۱۲	تحلیل داده ۲	۲ کاغذ میلی متری

۸	دوره ی طلای ۱۲	مفاهیم پایه ی تحلیل داده ۱	۱ کاغذ میلی متری، ۱ کاغذ قطبی
۹		میان دوره ی تحلیل داده	۵ کاغذ میلی متری
۱۰		مفاهیم پایه ی تحلیل داده ۲	۳ کاغذ میلی متری، ۱ کاغذ قطبی استفاده از پرگار مجاز نیست.
۱۱		تحلیل داده با اکسل	فایل های آزمون: http://9thioaa.ir/?download=728
۱۲	دوره ی تابستانی ۱۴	مفاهیم پایه ی تحلیل داده	۳ کاغذ میلی متری، ۱ کاغذ قطبی، ۱ کاغذ لگاریتمی
۱۳		تحلیل داده ۱	۲ کاغذ میلی متری، ۱ کاغذ لگاریتمی
۱۴		تحلیل داده ۲	۱ کاغذ میلی متری، ۱ کاغذ قطبی، ۱ کاغذ لگاریتمی
۱۵	دوره ی طلای ۱۴	مفاهیم پایه ی تحلیل داده	۳ کاغذ میلی متری، ۱ کاغذ لگاریتمی
۱۶		تحلیل داده ۱	۲ کاغذ میلی متری
۱۷		تحلیل داده با اکسل	فایل های آزمون: http://9thioaa.ir/?download=741
۱۸		تحلیل داده ۲	۲ کاغذ میلی متری

